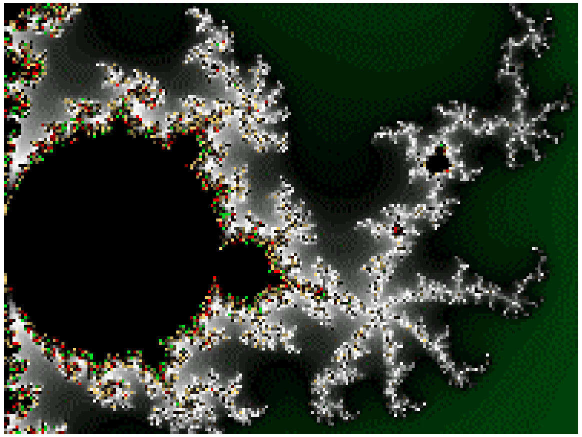
Frattali

"... perché la geometria viene descritta come arida e fredda?
Un motivo è la sua incapacità di descrivere la forma di un albero, di una nuvola, di una montagna. Le montagne non sono coni, le nuvole non sono sfere, gli argini di un fiume non sono regolari..."

(B. Mandelbrot)

- In natura esistono oggetti con forma geometrica non ben definita, ma che appaiono costruiti in accordo con alcune regole matematiche ben definite



- La geometria frattale permette di prendere in considerazione non solo oggetti e **strutture regolari, bensì quelli irregolari**. Essa permette di riconoscere **un ordine in fenomeni, oggetti o strutture che per la geometria classica erano da considerarsi come disordinati.**

- Il padre della geometria frattale può essere considerato Benoit Mandelbrot, che nel 1983 con la pubblicazione del libro The fractal geometry of nature, fece conoscere al grande pubblico questa nuova teoria matematica, anche se già a cavallo fra '800 e '900 vi furono scienziati come Julia o Hausdorff che si occuparono di argomenti simili.

Possiamo definire la dimensione di un oggetto attraverso il comportamento della sua misura caratteristica (size=S) rispetto all'incremento della sua dimensione lineare (L):

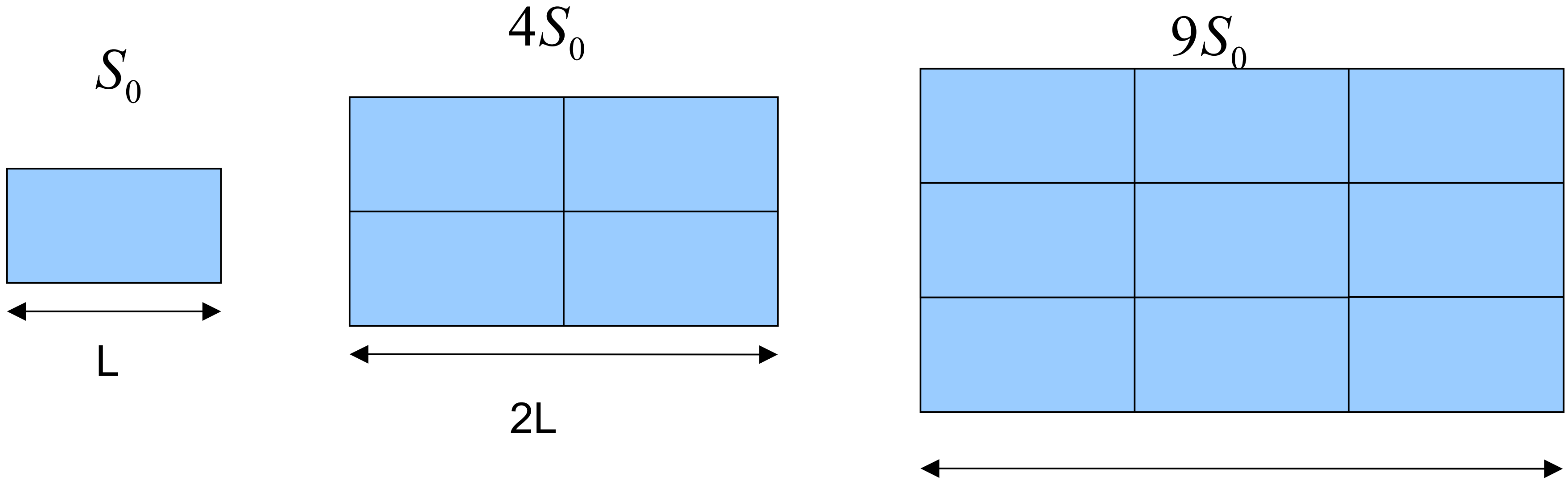
$$\boxed{S=L^d} \longrightarrow \boxed{d=\log(S)/\log(L)}$$

se raddoppiamo la dim. lineare di un segmento la sua lunghezza, banalmente raddoppia ⟶ segmento ha d= 1

se facciamo la stessa cosa per un rettangolo la sua superficie cresce di un fattore 4 ⟶ rettangolo ha d= 2

un cubo risulterà avere dim.3

<u>Nella geometria euclidea gli elementi hanno dimensioni intere</u>



$$S = hL \qquad h = cL$$

$$S(L) = S_0 = cL^2$$

$$S(2L) = c(2L)^2 = 4S_0$$

$$S(3L) = c(3L)^2 = 9S_0$$

$$\dots$$

$$S(L) = AL^x$$

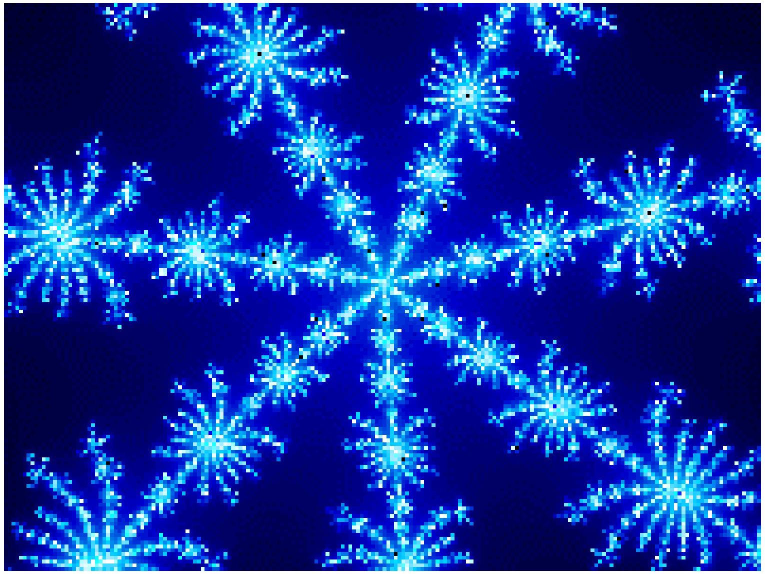
$$\frac{S(3L)}{S(2L)} = \frac{(3L)^x}{(2L)^x} = \left(\frac{3}{2}\right)^x$$

$$\Rightarrow \quad x = 2$$

Dimensione frattale

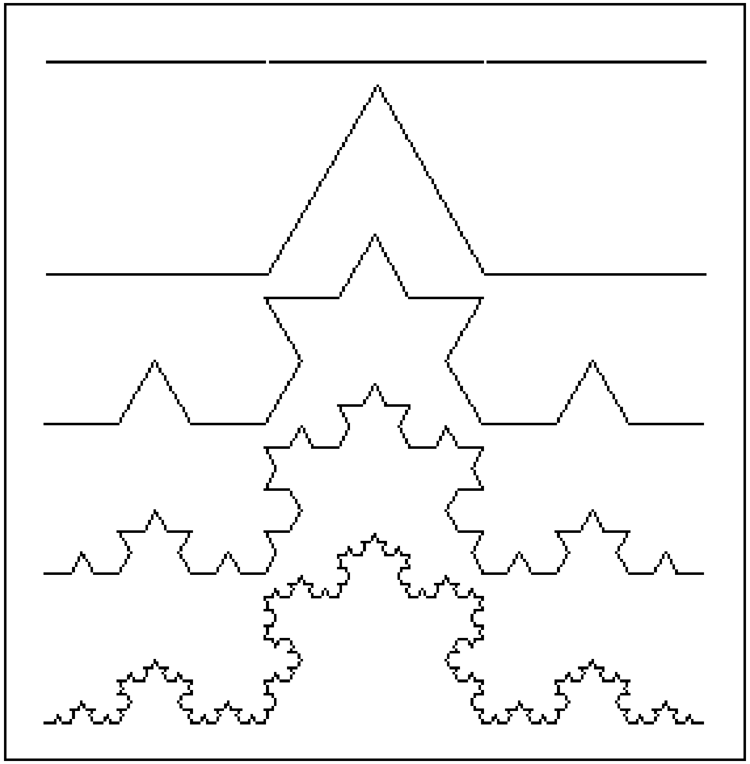
- Similmente a quanto detto, se postuliamo che le dimensioni di un oggetto sono determinate dalla dipendenza della sua massa dalla sua lunghezza
  - **Def. La dimensione di Hausdorf-Besicovitch d_f t.c.**
    $M(L)=AL^{df}$ con A=cost.
- Le figure la cui dimensione risulta essere un numero frazionario (**<u>dimensione frattale</u>**) sono proprio i frattali.

- Frattali esatti: hanno stessa dimensione in ogni parte
- Frattali statistici: la dimensione può essere definita solo localmente o come media.



Frattali esatti: stessa dimensione per ogni parte *ex.curva di Koch*

- **si costruisce** partendo da un segmento. Lo si divide in tre parti e si rimuove il terzo centrale. Quindi si costruisce un triangolo equilatero, avente come base il "buco" ottenuto rimuovendo la parte centrale del segmento. Si ottiene così una linea spezzata composta da quattro tratti. Per ognuno di questi tratti si ripete iterativamente l'operazione iniziale.
- **Ogni dettaglio è autosimile alla figura totale, o ad ogni altro dettaglio.**
- **Ad ogni iterazione la lunghezza è incrementata di 4/3**
- La curva riesce a comprimere in una lunghezza finita un'area infinita del piano che non si autointerseca



Autosimilarità (self-similarity)

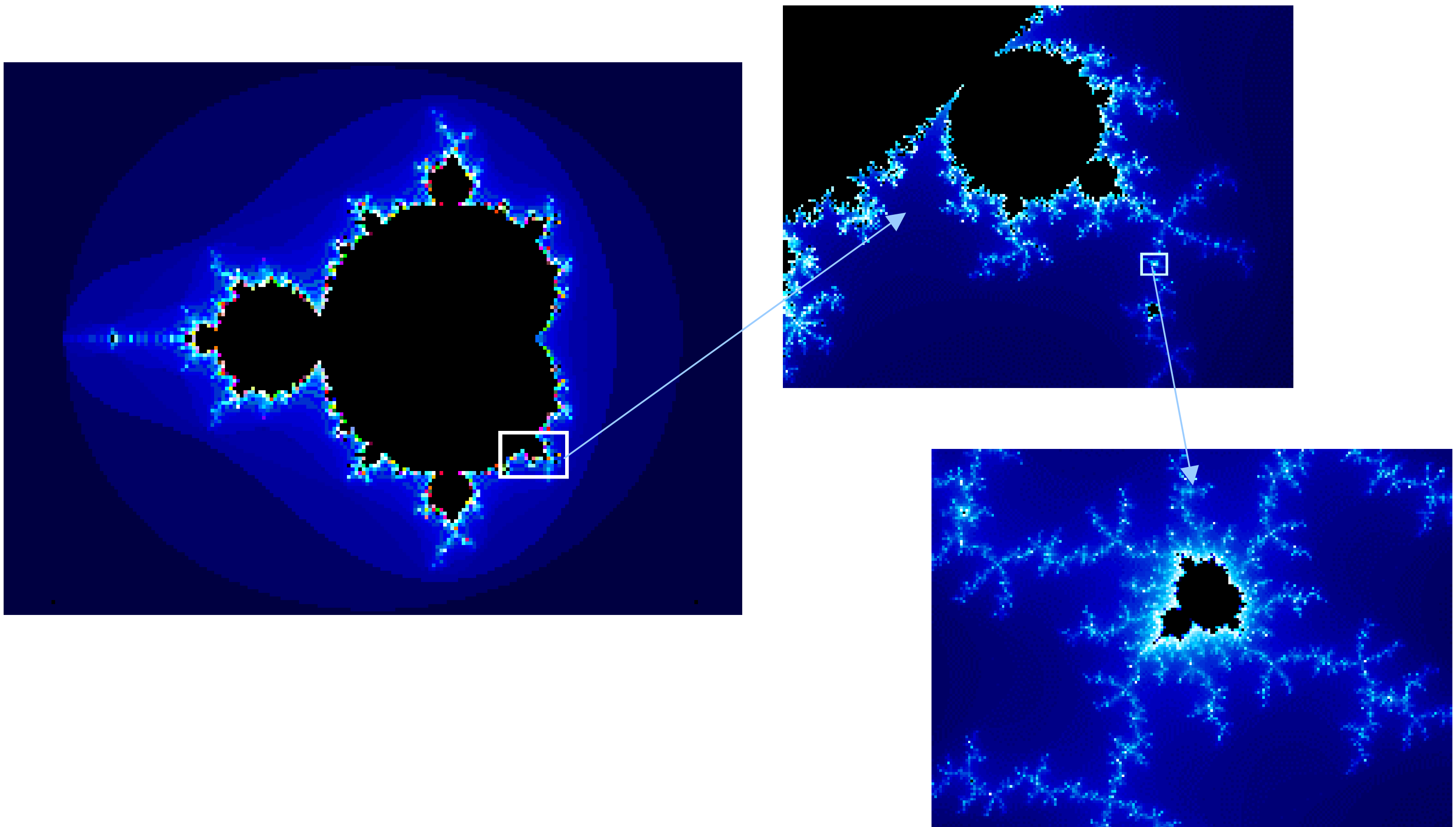
- **Un oggetto è autosimile se, comunque si prenda una sua parte, non importa di quale grandezza, essa risulterà simile al tutto.**

- Da questa definizione risulta come conseguenza che un oggetto o una struttura frattale è invariante per dilatazione di scala..

- Nelle strutture reali (ad esempio una foglia o un albero) l'autosomiglianza è soddisfatta solo in un intervallo delimitato da un massimo (es.: dimensioni della struttura o dell'oggetto) e un minimo (es. livello atomico).

- Per contro nelle strutture matematiche: l'autosomiglianza si può estendere da zero all'infinito.

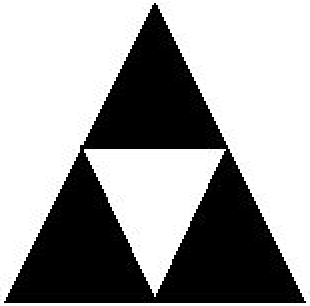
Questa proprietà di somiglianza della parte col tutto caratterizza gli insiemi frattali: essa è anche chiamata invarianza di scala, perchè l'insieme risulta essenzialmente invariante ad ogni ingrandimento, cioè a qualunque scala è osservato.

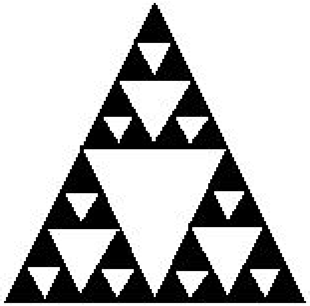


Caratteristiche principali

- Sono strutture auto simili: qualunque parte del frattale, se adeguatamente ingrandita, riproduce l'intera complessità della struttura complessiva
- Sono invarianti di scala: non hanno una scala di lunghezza caratteristica.
- Sono solitamente il risultato di un algoritmo iterativo o ricorsivo, ciò permette la descrizione di strutture molto complesse.

Sierpinsky gasket



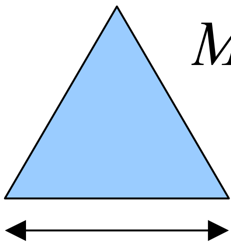


- Disegnare un triangolo equilatero con vertici fissi
  - 1) (a1,b1) (20.0,20.0)
  - 2) (a2,b2) (320.0,20.0)
  - 3) (a3,b3) (170.0,280.0)
- Porre un punto in $P=(x_{0,}y_0)$ arbitrario all'interno del triangolo
- Determinare le coordinate del punto successivo selezionando casualmente i punti 1,2, o 3:
  - 1) punto di mezzo tra P e il vertice 1
  - 2) punto di mezzo tra P e il vertice 2
  - 3) punto di mezzo tra P e il vertice 3

  Matematicamente $(x,y)= ((x_{new},y_{new}) +(a,b))/2$

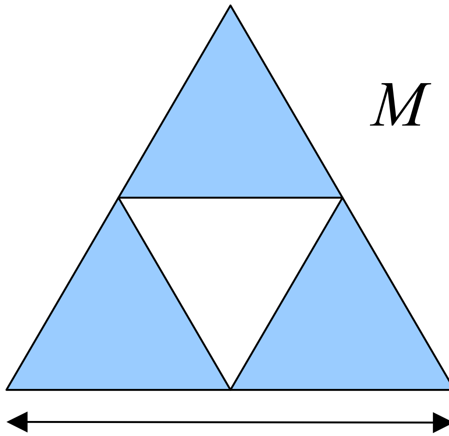
- ❑ Ripetere il procedimento considerando il nuovo punto come punto di partenza per N (30000) volte.
  - In viola sono suggeriti dei valori opportuni, ma facoltativi.

Calcolo dimensione frattale



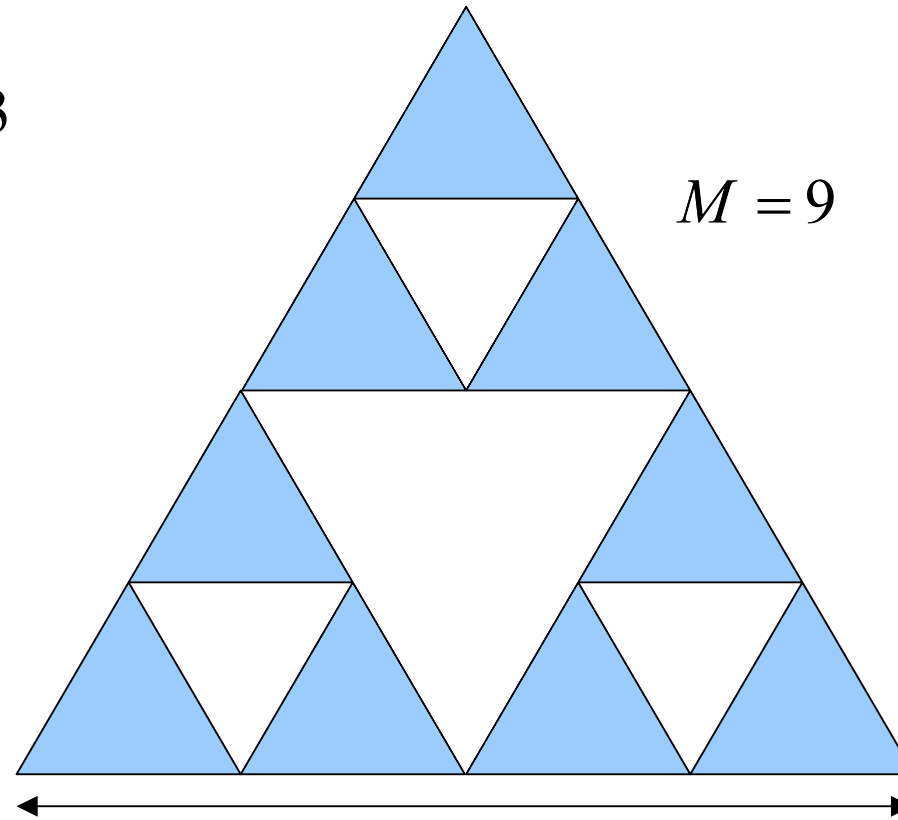
$M = 1$

L



$M = 3$

2L



$M = 9$

4L

$$M(L) = 1$$

$$M(2L) = 3$$

$$M(4L) = 9$$

...

$$M(L) = AL^x$$

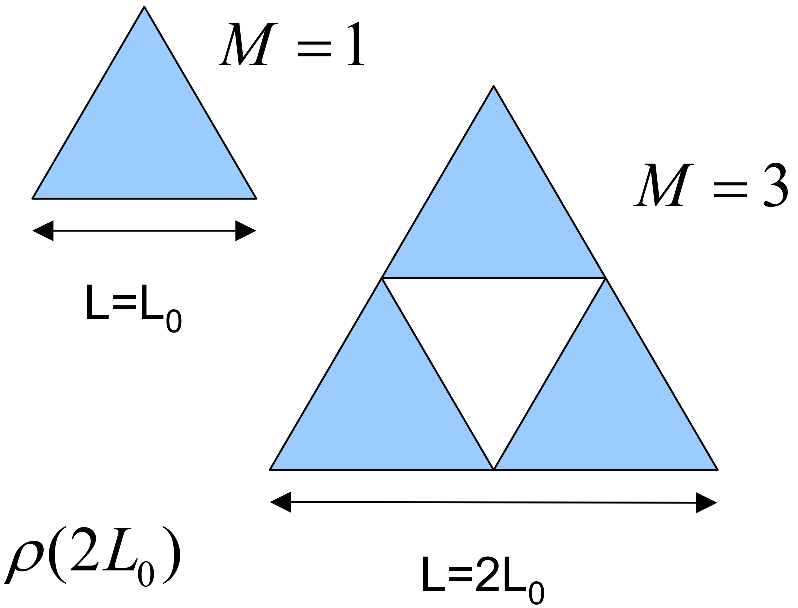
$$\frac{M(4L)}{M(2L)} = \frac{(4L)^x}{(2L)^x} = 2^x$$

$$2^x = \frac{9}{3} \rightarrow \quad x = \frac{\log 3}{\log 2} = 1.58$$

Altra maniera

Si può definire una densità del frattale

$$M(L) = \rho(L) c L^2 \rightarrow \rho(L) = \frac{M}{cL^2}$$



$$\rho(L_0) = \frac{1}{cL_0^2}$$

$$\rho(2L_0) = \frac{3}{c4L_0^2} \qquad \rho(4L_0) = \frac{9}{c16L_0^2} = \frac{3}{4}\rho(2L_0)$$

$$\rho(L) = BL^y \qquad \frac{\rho(4L_0)}{\rho(2L_0)} = 2^y \qquad \frac{3}{4} = 2^y \rightarrow y = \frac{\log 3}{\log 2} - 2$$

$$M(L) = AL^x = AL^2 L^y \rightarrow x = \frac{\log 3}{\log 2} = 1.58$$

Trasformazioni auto-affini

- $(x,y) \longrightarrow (½)\,(x\ldots,y\ldots)$ nel Sierpinski
- Possiamo considerare vari tipi di trasformazioni:
  - ❖ $(x_1,y_1)= s(x_0,y_0)$ scaling
  - ❖ $(x_1,y_1)= (x_0,y_0)+ (a,b)$ traslazione
  - ❖ $(x_1,y_1)= (x_0,y_0)(\sin\theta,\cos\phi)$ rotazione

  Il cui insieme definisce le trasformazioni affini:

  L'oggetto creato risulta auto-affine

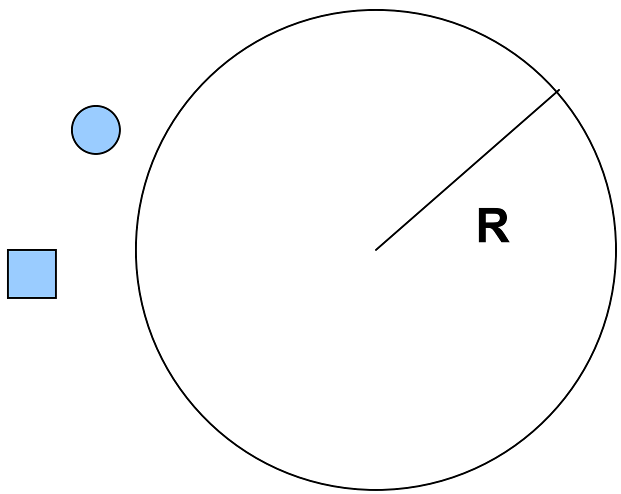
Come disegnare un albero:

- Attraverso l’iterazione di una serie di trasformazioni autoaffini “casuali” si possono riprodurre “elementi naturali”

```
do i=1,max
      r=drand48()
      if (r.lt.0.1)then
        x=0.05*(xn)
        y=0.6*(yn)
      else if (r.lt.0.2)then
        x=0.05*(xn)
        y=-0.5*(yn)+1.0
      else if (r.lt.0.4)then
        x=xn*0.46-0.15*yn
        y=0.39*xn+0.38*yn+0.6
      else if(r.lt.0.6)then
        x=xn*0.47-0.15*yn
        y=0.17*xn+0.42*yn+1.1
      else if(r.lt.0.8)then
        x=0.43*xn+0.28*yn
        y=-0.25*xn+0.45*yn+1.0
      else
        x=0.42*xn+0.26*yn
        y=-0.35*xn+0.31*yn+0.7
      end if
      xn=x
      yn=y
    write (10,*),x,y
    end do
```

Box counting

Immaginiamo di voler ricoprire un cerchio con tanti cerchi o quadrati piccoli



$$N_b = \lim_{r \to 0} \frac{\pi R^2}{\pi r^2} \qquad d = 2$$

In 3 dim. Per coprire una sfera si possono usare sferette o cubetti

$$d = 3$$

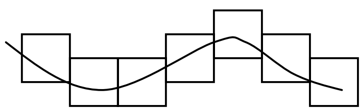
Piu' in generale per figure più complicate avremo una relazione del tipo

$$N_b \propto \left(\frac{1}{r}\right)^d$$

con d non intero

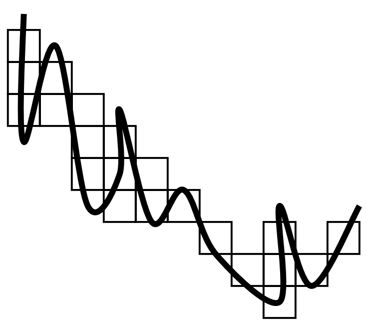
Lunghezza delle coste

Immaginiamo di avere il profilo frastagliato di una costa. Come si fa a determinarne la lunghezza ?



Si può ricoprire con delle box che seguono il percorso frastagliato e coprono la costa $N_b =$

Per data larghezza della box saranno necessari un numero N_b di box per ricoprire la costa



$$d = \lim_{r \to 0} \frac{\log N_b(r)}{\log\left(\frac{1}{r}\right)} \qquad s = 1/r \qquad L(s) = As^d$$

$$s \to \infty$$

- Fissata s prendiamo un box=1*1cm e contiamo il nbox1 necessario a ricoprire la fig. (es. s=17 nbox=24)
- Dimezziamo il box, s raddoppierà, contiamo nuovamente ed otteniamo nbox2 (es. s=34 nbox=51)
- Consideriamo ora box=1*1mm , s=170,

  e contiamo di nuovo ottenendo nbox3.

  (nell’es. nbox3=406)
- df=dlog(n)/dlog(s)   trovate s…….

- Fissata s prendiamo un box=1*1cm e contiamo il nbox1 necessario a ricoprire la fig. (es. s=17 nbox=24)
- Dimezziamo il box, s raddoppierà, contiamo nuovamente ed otteniamo nbox2 (es. s=34 nbox=51)
- Consideriamo ora box=1*1mm , s=170,

  e contiamo di nuovo ottenendo nbox3.

  (nell'es. nbox3=406)
- df=dlog(n)/dlog(s)   df=-1.23…….

DLA diffusion-limited-aggregation

- Esempio di frattale statistico:
  - La media statistica di alcune proprietà (densità) decade linearmente con la dimensione lineare (lenght scale) in un plot log-log
- Oggetti per cui un processo casuale determina la struttura risultano frattali a determinate scale.

Letteralmente la traduzione in italiano è "Aggregato per diffusione limitata" e si basa sui seguenti principi:

* vi è uno spazio limitato in cui interagiscono le particelle;

* vi è un sito iniziale attorno a cui cresce l'aggregato;

* le particelle si muovono caoticamente nello spazio finché non vengono a contatto con una particella che si è già aggregata: a questo punto la nostra particella smette di muoversi e si fissa accanto a quella aggregata in precedenza.

- La struttura del DLA appare spontaneamente quando si affronta lo studio di vari fenomeni di notevole interesse, per più di 50 realizzazioni di sistemi fisici.

Esempio di applicazione

- Sono stati condotti esperimenti in laboratorio sulla formazione di aggregati per precipitazione, per esempio aggregati di rame per precipitazione da solfato di rame.

- Contemporaneamente ne è stata simulata la crescita al calcolatore in uno spazio tridimensionale (attenendosi dunque strettamente alla realtà).I due risultati (quello sperimentale e quello teorico) sono molto simili benché nella sperimentazione gli atomi interagenti siano miliardi di miliardi mentre nella simulazione computerizzata si utilizzino solo alcune migliaia di particelle.

Foto della deposizione sperimentale.

Si è calcolato sperimentalmente che un aggregato di questo tipo ha una dimensione frattale pari a 2,4.

Come si costruisce il modello.

- Si costruisce a partire da una griglia di base. Poniamo una particella al centro di tale griglia, costruiamo quindi una circonferenza e da un punto casuale facciamo partire “un ubriaco”: un particella che effettui un random walk ristretto ai soli spostamenti verticali oizzontali.
- Il moto browniano simula il processo diffusivo. Per renderlo piu realistico definiamo il passo massimo variabile casualmente secondo una distr.gaussiana
- Se la particella incontra un’altra particella si ferma formando un aggregato ed il meccanismo ricomincia
- Se oltrepassa il limite della griglia è persa, e si ricomincia.
- Ripetendo molte volte tale processo si ottiene una struttura frattale.

DLA

- Costruire una griglia (reticolo) size*size
  - Inizializzare tutti i punti a zero
  - Max=40000 n. iterazioni
  - Size= 401
  - r interno alla griglia (es. 180)
- Aprire file output
- Posizionare una particella al centro della griglia (grid (200,200)=1)
- Inizio main-loop

  Selezione casuale della particella di avvio per il Random-Walk

  angle=random

  x=200+rcos(angle)

  y=200+rsin(angle)
- Dist=100000

- Se rand >.5 step=-1 altrimenti step=1

  Determina il verso del moto
- Do fino a quando cont1=0,cont2<abs(dist),

  non si esce dalla griglia
  - Se il vicino e occupato (somma delle grigli dei primi vicini>0) grid(x,y)=1 ed esco (cont1=1)
  - Altrimenti Random Walk:

    rand2 determina moto lungo x o y

    si incrementa cont2

•End do

•Scrivi output : x,y per cui grid(x,y) =1

•fine

dimensione

- Disegnare quadrato L*L attorno ad un sito occupato (origine locale del DLA)
- Contare i siti occupati internamente al quadrato (otteniamo ncont)
- Scegliere diversi punti di origine e ripetere l’operazione, così da avere una buona statistica
- Def densità come ncont =$M(L)/L^2$
- Determinare il coefficiente grafico log-log di <ncont> in funzione di L.
- la dimensione frattale sarà la pendenza asintotica di M(L) in funzione di L per L$\rightarrow$ infinito, quindi il coefficiente trovato -2
  - 1.55 square lattice DLA
  - 1.715 off-lattice DLA

Applicazioni

I frattali trovano applicazioni in diversi campi, alcuni esempi:

- **Chimica**: nella descrizione delle proprietà chimiche delle superfici
- **Industria farmaceutica**: nella descrizione delle proprietà di alcune sostanze farmacologiche
- **Industria grafica**: nella ricostruzione di immagini di oggetti e ambienti simili-naturali
- **Anatomia**: nella descrizione e comparazione di sistemi molto irregolari come la parete cellulare dei capillari polmonari, i bronchi, i villi intenstinali, la rete dei capillari
- **Scienze della terra**: suoli con differenti composizioni si possono associare a differenti dimensioni frattali, correlate a loro volta con proprietà del suolo quale la percolazione o la capacità di ritenzione idrica.