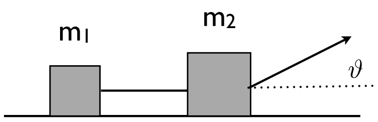
Testo e soluzioni della prova scritta di Fisica Generale 1

11 Giugno 2013

ESERCIZIO 1
Due scatole di massa $m_1 = 6\,\text{kg}$ e $m_2 = 10\,\text{kg}$ rispettivamente poggiano su un piano orizzontale liscio e sono collegate tra loro con una fune inestensibile e di massa trascurabile. Un uomo trascina le due scatole applicando una forza F alla scatola di massa m_2. La retta di applicazione della forza forma un angolo $\vartheta = 30°$ con il piano orizzontale (vedi figura).

- Calcolare il valore massimo della forza F che può essere applicata sapendo che la fune si rompe se è sottoposta a una tensione $T > 60\,\text{N}$ **(3.5 Punti)**.
- Nel caso in cui e il coefficiente di attrito tra le scatole e il piano è pari a $\mu_1 = 0.5$ e $\mu_2 = 0.6$ per m_1 e m_2 rispettivamente, calcolare il valore della forza F e dell'accelerazione con cui si muovono le due masse quando la tensione della fune è pari a $T' = 40\,\text{N}$ **(5 Punti)**.



SOLUZIONE
Scriviamo le equazioni del moto:

$$\begin{aligned} m_1 a &= T \\ m_2 a &= F\cos\vartheta - T \end{aligned}$$

Sommando le due equazioni si ottiene:

$$(m_1 + m_2)a = F\cos\vartheta$$

Si ottiene quindi:

$$a = \frac{F\cos\vartheta}{(m_1+m_2)}, \quad T = m_1\frac{F\cos\vartheta}{(m_1+m_2)}, \quad F = \frac{(m_1+m_2)T}{m_1\cos\vartheta}.$$

Il filo si spezza quando la tensione è massima, ovvero quando $T = T_{MAX} = 60\,\text{N}$:

$$F_{MAX} = \frac{(m_1+m_2)T_{MAX}}{m_1\cos\vartheta} = 184.8\,\text{N}.$$

Nel caso in cui sia presente attrito le equazioni del moto si scrivono:

$$\begin{aligned} m_1 a &= T - \mu_1 m_1 g \\ m_2 a &= F\cos\vartheta - T - \mu_2(m_2 g - F\sin\vartheta). \end{aligned}$$

Sommando le due equazioni si ottiene:

$$(m_1+m_2)a = F(\cos\vartheta + \mu_2\sin\vartheta) - g(\mu_1 m_1 + \mu_2 m_2),$$

quindi

$$\begin{aligned} a &= \frac{F(\cos\vartheta + \mu_2\sin\vartheta) - g(\mu_1 m_1 + \mu_2 m_2)}{(m_1+m_2)}, \\ T &= \frac{m_1}{m_1+m_2}[F(\cos\vartheta + \mu_2\sin\vartheta) - m_2 g(\mu_2 - \mu_1)], \\ F &= \frac{1}{(\cos\vartheta + \mu_2\sin\vartheta)}\left[\frac{m_1+m_2}{m_1}T + \mathrm{m}_2 g(\mu_2 - \mu_1)\right]. \end{aligned}$$

Sostituendo a T il valore $T' = 40\,\mathrm{N}$ si ottiene

$$F \approx 99.9\,\mathrm{N}, \qquad a \approx 1.75\,\mathrm{m/s}^2$$

ESERCIZIO 2

Un cannoncino di massa $M = 5\,\mathrm{kg}$ spara in orizzontale una biglia di massa $m = 0.5\,\mathrm{kg}$. La biglia scivola su una superficie orizzontale scabra con coefficiente di attrito $\mu = 0.3$. Percorso un tratto $l_1 = 4\,\mathrm{m}$ la biglia incontra un piano inclinato di $\vartheta = 30°$ con uguale coefficiente di attrito e lungo $l_2 = 5\,\mathrm{m}$. La biglia sale fino alla sommità del piano inclinato dove arriva con velocità nulla. Calcolare:

- la velocità con cui viene lanciata la biglia **(4 Punti)** ;
- la velocità di rinculo del cannoncino **(2.5 Punti)**;
- il valore minimo del coefficiente di attrito statico del piano inclinato tale che la biglia non riscenda verso il basso **(1.5 Punti)**.

SOLUZIONE

La variazione di energia meccanica è uguale al lavoro della forza di attrito lungo tutto il percorso. La sommità del piano si trova ad un'altezza $h = l_2 \sin\vartheta$. Si ha quindi

$$mgl_2 \sin\vartheta - \frac{1}{2}mv^2 = -\mu mgl_1 - \mu mgl_2 \cos\vartheta,$$

da cui segue

$$v = \sqrt{2\mu g(l_1 + l_2 \cos\vartheta) + 2gl_2 \sin\vartheta} = 9.9\,\mathrm{m/s}$$

Nello sparo la quantità di moto si conserva:

$$(M + m)v_0 = mv + MV_R$$

dove $v_0 = 0$ è la velocità prima dello sparo e V_R è la velocità di rinculo. In modulo:

$$V_R = \frac{m}{M}v = 0.99\,\mathrm{m/s}$$

Il valore massimo del coefficiente di attrito statico si ottiene dalla relazione:

$$\mu_S g \cos\vartheta > g \sin\vartheta \Rightarrow \mu_S > \tan\vartheta \approx 0.58$$

ESERCIZIO 3

Una pallina di massa $m = 0.3\,\mathrm{kg}$ si muove su un piano orizzontale liscio con una velocità $v_1 = 2\,\mathrm{m/s}$. Ad un certo istante urta una seconda pallina di massa $m_2 = 0.2\,\mathrm{kg}$ in quiete. La seconda pallina è attaccata all'estremità di una molla di costante elastica $k = 2.5\,\mathrm{N/m}$ ed è disposta lungo la direzione di moto della prima pallina. L'altro estremo della molla è fissato a un vincolo. Calcolare la deformazione Δl della molla a seconda che l'urto sia:

- completamente elastico **(4 Punti)**;
- completamente anelastico **(3 Punti)**.

SOLUZIONE

Nell'urto completamente elastico si conservano sia l'energia cinetica che la quantità di moto totale:

$$\begin{aligned} m_1v_1 + m_2v_2 &= m_1v_1' + m_2v_2' \\ \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 &= \frac{1}{2}m_1v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2v_2'^2 \end{aligned}$$

Risolvendo si trova:

$$\begin{aligned} v_1' &= \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}v_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2}v_2, \\ v_2' &= \frac{2m_1}{m_1 + m_2}v_1 + \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2}v_2. \end{aligned}$$

Dato che $v_2 = 0$ si ottiene:

$$v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}v_1 = 0.4\,\mathrm{m/s}, \quad v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}v_1 = 2.4\,\mathrm{m/s}.$$

L'energia cinetica della seconda biglia si trasforma in energia potenziale elastica:

$$\frac{1}{2}mv_2'^2 = \frac{1}{2}k(\Delta l)^2 \Rightarrow \Delta l = v_2'\sqrt{\frac{m_2}{k}} \approx 0.68\,\mathrm{m}$$

Nel caso di urto anelastico si conserva solo la quantità di moto:

$$m_1v_1 + m_2v_2 = (m_1 + m_2)V$$

Dato che $v_2 = 0$ si ottiene:

$$m_1v_1 = (m_1 + m_2)V \Rightarrow V = \frac{m_1v_1}{m_1 + m_2} = 1.2\,\mathrm{m/s}$$

In questo caso

$$\Delta l = V\sqrt{\frac{m_1 + m_2}{k}} \approx 0.54\,\mathrm{m}$$

ESERCIZIO 4

Due moli di gas perfetto con calore specifico a volume costante $c_v = 3R$ si trovano nello stato $V_A = 0.4\,\mathrm{m}^3$, $T_A = 500\,\mathrm{K}$. Il gas è sottoposto alle seguenti trasformazioni: una espansione adiabatica reversibile fino a $V_B = 3V_A$; una compressione isocora reversibile in cui la temperatura viene riportata al valore iniziale T_A; una compressione isoterma reversibile fino a ritornare allo stato iniziale. Trovare:

- il lavoro totale **(2 Punti)** ;
- la variazione di energia interna lungo tutte le trasformazioni e dimostrare che la somma è nulla lungo tutto il ciclo **(3 Punti)**;
- la variazione di entropia lungo tutte le trasformazioni e dimostrare che la somma è nulla lungo tutto il ciclo
  (3 Punti);

Calcolare la variazione di entropia del gas lungo una trasformazione adiabatica irreversibile tra lo stato $V_A = 0.4\,\mathrm{m}^3$, $T_A = 500\,\mathrm{K}$ e uno stato $V_X = 3V_A$, $T_X = 250\mathrm{K}$. **(1.5 Punti)**.

SOLUZIONE

Calcolo la temperatura nello stato B.

$$T_AV_A^{\gamma-1} = T_BV_B^{\gamma-1} \Rightarrow T_B = \frac{T_AV_A^{\gamma-1}}{V_B^{\gamma-1}} \Rightarrow T_B = \frac{T_A}{3^{\gamma-1}}$$

Dato che $c_p = c_v + R = 4R$, si ha che $\gamma = c_p/c_v = 4/3$, quindi $T_B = 346.7\,\mathrm{K}$. Dato che in un'adiabatica $Q = 0$:

$$W_{AB} = -\Delta U_{AB} = -nc_v(T_B - T_A) = 7643.5\,\mathrm{J}$$

Nella trasformazione isocora BC $W = 0$ quindi

$$Q_{BC} = \Delta U_{BC} = nc_v(T_C - T_B) = nc_v(T_A - T_B) = 7643.5\,\mathrm{J}$$

Nell'isoterma CA $\Delta U = 0$,

$$Q = W = \int_{V_C}^{V_A} PdV = nRT_A\int_{V_C}^{V_A}\frac{dV}{V} = nRT_A\ln\frac{V_A}{V_C} = nRT_A\ln\frac{V_A}{V_B} = nRT_A\ln\frac{1}{3} = -9129.4\,\mathrm{J}$$

Il lavoro scambiato lungo tutto il ciclo è:

$$L_{TOT} = Q_{AB} + Q_{BC} + Q_{CA} = -1485.9\,\mathrm{J}$$

La variazione di energia interna nelle singole trasformazioni vale:

$$\begin{aligned}
\Delta U_{AB} &= nc_v(T_B - T_A) = -7643.5 \\
\Delta U_{BC} &= nc_v(T_A - T_B) = 7643.5 \\
\Delta U_{CA} &= 0 \\
\Delta U_{TOT} &= \Delta U_{AB} + \Delta U_{BC} + \Delta U_{CA} = 0
\end{aligned}$$

La variazione di entropia in una adiabatica reversibile è nulla. Nella trasformazione BC:

$$\Delta S_{BC} = \int (\frac{dQ}{T})_{rev} = nc_v \int_{T_B}^{T_C} \frac{dT}{T} = nc_v \ln \frac{T_C}{T_B} = nc_v \ln \frac{T_A}{T_B} = 18.3\,\mathrm{J/K}.$$

Nell'isoterma CA:

$$\Delta S_{CA} = \int (\frac{dQ}{T})_{rev} = \int_{T_C}^{T_A} \frac{dQ}{T_A} = \frac{1}{T_A} \int_{V_C}^{V_A} PdV = nR \ln \frac{V_A}{V_C} = -18.3\,\mathrm{J/K}$$

Si verifica facilmente che $\Delta S_{CICLO} = \Delta S_{AB} + \Delta S_{BC} + \Delta S_{CA} = 0$.
Nel caso in cui la trasformazione AX sia una adiabatica irreversibile la variazione di entropia deve essere calcolata lungo una qualsiasi serie di trasformazioni reversibili che congiungono gli stati inziale e finale. Si può ad esempio utilizzare un'isoterma seguita da un'isocora.

$$\Delta S_{AX} = \Delta S_1 + \Delta S_2$$

$$\begin{aligned}
\Delta S_1 &= \frac{1}{T_A} \int_{V_A}^{V_X} PdV = nR \ln \frac{V_X}{V_A} = nR \ln 3 = 18.3\,\mathrm{J/K} \\
\Delta S_2 &= nc_v \int_{T_A}^{T_X} \frac{dT}{T} = nc_v \ln \frac{T_X}{T_A} = nR \ln \frac{1}{2} = -34.6\,\mathrm{J/K}
\end{aligned}$$

In totale quindi $\Delta S_{AX} = \Delta S_1 + \Delta S_2 = -16.3\,\mathrm{J/K}$.