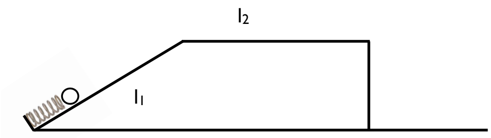
Prova scritta di Fisica Generale 1

9 Luglio 2013

I Esonero: esercizi 1 e 2 (tempo a disposizione 2 ore)
II Esonero: Esercizi 3 e 4 (tempo a disposizione 2 ore)
Esame: Tutti gli esercizi (tempo a disposizione 4 ore)
NB: Nel caso di esonero i punteggi devono essere raddoppiati per ottenere il voto in trentesimi.

ESERCIZIO 1
Una biglia di massa $m = 1\,\mathrm{kg}$ viene lanciata sulla guida mostrata in figura per mezzo di una molla di costante elastica k e di lunghezza a riposo $l = 0.1\,\mathrm{m}$ completamente compressa. Il tratto $l_1 = 3\,\mathrm{m}$ è inclinato di $\vartheta = 30°$, il tratto orizzontale ha lunghezza $l_2 = 2.5\,\mathrm{m}$. Il coefficiente di attrito tra la biglia e la guida è pari a $\mu = 0.25$. Calcolare:

- il valore massimo k_M della costante elastica tale che la biglia non cada dalla guida **(2 punti)**
- la distanza a cui cade la biglia se $k = 2k_M$ **(4 punti)**
- il valore di una forza F orizzontale che agisce solo nel tratto l_2 tale da arrestare la biglia prima della caduta quando la costante elastica della molla è $2k_M$ **(2 punti)**.



SOLUZIONE
La biglia non cade se raggiunge il bordo della superficie orizzontale con velocità nulla. Sapendo che la variazione di energia meccanica è uguale al lavoro delle forze non conservative:

$$mgl_1 \sin\vartheta - \frac{1}{2}k_M l^2 = -\mu mgl_1 \cos\vartheta - \mu mgl_2.$$

Risolvendo rispetto a k_M:

$$k_M = \frac{2}{l^2}(\mu mgl_1 \cos\vartheta + mgl_1 \sin\vartheta + \mu mgl_2) = 5444\,\mathrm{N/m}$$

Quando $k = 2k_M$ la velocità della biglia nell'istante in cui raggiunge il bordo della superficie orizzontale si ottiene dalla relazione:

$$mgl_1 \sin\vartheta + \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}2k_M l^2 = -\mu mgl_1 \cos\vartheta - \mu mgl_2.$$

Risolvendo rispetto a v:

$$v = \sqrt{\frac{1}{m}(2k_M l^2 - 2mgl_1 \sin\vartheta - 2\mu mgl_1 \cos\vartheta - 2\mu mgl_2)} = 7.38\,\mathrm{m/s}$$

La biglia cade dalla guida seguendo una traiettoria parabolica:

$$\begin{aligned} x(t) &= vt \\ y(t) &= -\frac{1}{2}gt^2 + l_1 \sin\vartheta \end{aligned}$$

da cui si ottiene

$$t = \sqrt{\frac{2l_1 \sin\vartheta}{g}} = 0.55\,\mathrm{s}$$

$$x = vt = v\sqrt{\frac{2l_1 \sin\vartheta}{g}} = 4.1\,\mathrm{m}$$

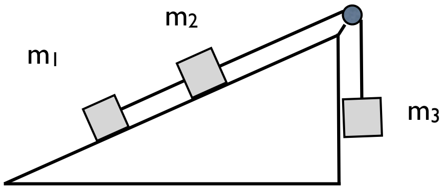
Per calcolare il valore della forza F si può nuovamente applicare il teorema dell'energia meccanica

$$mgl_1 \sin\vartheta - \frac{1}{2}2k_M l^2 = -\mu mgl_1 \cos\vartheta - \mu mgl_2 - Fl_2.$$

Risolvendo rispetto a F

$$F = \frac{1}{l_2}(k_M l^2 - mgl_1 \sin\vartheta - \mu mgl_1 \cos\vartheta - \mu mgl_2) = 10.9\,\mathrm{N}$$

ESERCIZIO 2
Tre corpi di massa $m_1 = 2\,\text{kg},\ m_2 = 3\,\text{kg},\ m_3 = 7\,\text{kg}$ sono disposti come in figura. Il coefficiente di attrito tra m_1 e m_2 e il piano inclinato è $\mu_1 = 0.3$, $\mu_2 = 0.2$ rispettivamente. Il piano è inclinato di un angolo $\vartheta = 30°$. Calcolare l'accelerazione le tensioni delle corde.
Se la fune tra m_1 e m_2 viene sostituita da una molla di costante elastica $k = 100\,\text{N/m}$; calcolare di quanto si allunga la molla durante il moto.



SOLUZIONE
Le equazioni del moto sono

$$-m_3 a = -m_3 g + T_1$$

$$m_2 a = T_1 - m_2 g \sin\vartheta - \mu_2 m_2 g \cos\vartheta - T_2$$

$$m_1 a = T_2 - m_1 g \sin\vartheta - \mu_1 m_1 g \cos\vartheta$$

Risolvendo si trova

$$a = \frac{1}{(m_1 + m_2 + m_3)}[m_3 g - (m_1 + m_2) g \sin\vartheta - (\mu_1 m_1 + \mu_2 m_2) g \cos\vartheta] = 4.9\,\text{m/s}^2$$

di conseguenza

$$T_1 = m_3 g - m_3 a = 34.3\,\text{N}$$

$$T_2 = m_1 a + m_1 g \sin\vartheta + \mu_1 m_1 g \cos\vartheta = 24.7\,\text{N}$$

Nel caso in cui la fune tra m_1 e m_2 viene sostituita da una molla:

$$-m_3 a = -m_3 g + T_1$$

$$m_2 a = T_1 - m_2 g \sin\vartheta - \mu_2 m_2 g \cos\vartheta - kx$$

$$m_1 a = kx - m_1 g \sin\vartheta - \mu_1 m_1 g \cos\vartheta$$

Si vede facilmente che la forza elastica kx ha la stessa espressione di T_2. Si ottiene quindi

$$kx = m_1 a + m_1 g \sin\vartheta + \mu_1 m_1 g \Rightarrow x = \frac{m_1 a + m_1 g \sin\vartheta + \mu_1 m_1 g}{k} = 0.25\,\text{m}.$$

ESERCIZIO 3
Un disco omogeneo di massa $M = 4\,\text{kg}$ e raggio $R = 0.5\,\text{m}$ sale senza strisciare lungo un piano inclinato di un angolo $\vartheta = 30°$, tirato da una forza $F = 30\,\text{N}$ parallela al piano inclinato e applicata all'estremo superiore del disco. Trovare:

- il modulo dell'accelerazione angolare e l'accelerazione del centro di massa **(4 punti)**
- modulo direzione e verso della forza di attrito **(3 punti)**
- il valore minimo del coefficiente di attrito che permette un moto di puro rotolamento **(1.5 punti)**

SOLUZIONE
Sul disco agiscono la forza peso, la forza F applicata, la reazione vincolare R_N e la forza di attrito F_A. Utilizziamo come polo il centro di massa del disco, le equazioni del moto diventano:

$$F - Mg \sin\vartheta + F_A = M a_{CM}$$

$$F_A R - FR = I\alpha$$

Dato che il moto è di puro rotolamento sappiamo che $a_{CM} = -\alpha R$. Risolvendo si trova:

$$\alpha = -\frac{2FR - Mg\sin\vartheta R}{I + MR^2} = -\frac{2FR - Mg\sin\vartheta R}{\frac{1}{2}MR^2 + MR^2} \approx -13.5\,\text{rad/s}^2.$$

L'accelerazione del centro di massa vale quindi $a_{CM} = \alpha R = 6.8\,\text{m/s}^2$. La forza di attrito si ottiene dalla seconda equazione:

$$F_A = F + \frac{I\alpha}{R} = 13.5\ \text{N}$$

Il valore minimo del coefficiente di attrito si ottiene dalla relazione:

$$F_A \leqslant \mu_s R_N \Rightarrow \mu_s \geqslant \frac{F_A}{R_N} = \frac{F_A}{Mg\cos\vartheta} = 0.4.$$

ESERCIZIO 4

Cinque moli di gas perfetto biatomico sono contenute in un recipiente di volume iniziale $V_0 = 0.1\,\mathrm{m}^3$ alla temperatura iniziale $T_0 = 300\mathrm{K}$. Il recipiente viene messo in contatto con una sorgente di massa $M = 2\,\mathrm{kg}$ e calore specifico $c_s = 600\,\mathrm{J/\,kgK}$ alla temperatura $T_s = 1000\,\mathrm{K}$. Il gas si espande bruscamente a pressione costante raggiungendo una nuova condizione di equilibrio. Trovare:

- la temperatura finale del gas **(3 punti)**
- il lavoro fatto dal gas **(2 punti)**
- la variazione di entropia del sistema gas + sorgente **(3 punti)**

SOLUZIONE

Il gas si espande a pressione costante, il calore ceduto dalla sorgente viene interamente assorbito dal gas:

$$MC_s(T_i - T_F) = nc_p(T_F - T_0) \Rightarrow T_F = \frac{nc_pT_0 + Mc_sT_i}{nc_p + Mc_s} = 924.3\,\mathrm{K}$$

Il lavoro fatto dal gas si ottiene dal primo principio:

$$L = Q - \Delta U = nc_p(T_F - T_0) - nc_v(T_F - T_0) = n(c_p - c_v)(T_F - T_0) = 25939.7\,\mathrm{J}$$

La variazione di entropia del sistema è pari alla somma della variazione di entropia del gas e di quella della sorgente di massa M:

$$\Delta S_{Sorg} = Mc_s \ln\frac{T_F}{T_i} = -94.5\,\mathrm{J/K}$$

$$\Delta S_{gas} = nc_p \ln\frac{T_F}{T_0} = 163.6\,\mathrm{J/K}$$

La variazione di entropia del sistema è quindi $\Delta S_{tot} = 69.1\,\mathrm{J/K}$.