IL CAMPO ELETTROMAGNETICO LIBERO: TRATTAZIONE CLASSICA

Le equazioni di Maxwell sono il punto di partenza per una descrizione completa della teoria classica dei campi elettromagnetici (EM) e della loro interazione con la materia.
Il campo elettromagnetico può essere descritto dai campi vettoriali elettrico $\vec{E}$ e magnetico $\vec{B}$ o alternativamente dai potenziali elettromagnetici $\vec{A}$ e ϕ. Inoltre un sistema composto da un campo elettromagnetico che interagisce con particelle cariche può essere descritto attraverso il formalismo Hamiltoniano.

I - EQUAZIONI DEL CAMPO ELETTROMAGNETICO

In generale per descrivere un campo elettromagnetico è necessario specificare $\vec{E}$ e $\vec{B}$ in funzione della posizione $\vec{r}$ e del tempo t. Le sorgenti del campo EM sono le cariche, e_i, e le loro correnti associate.
La densità di carica $\rho(\vec{r},t)$ e la densità di corrente $\vec{J}(\vec{r},t)$ sono definite come segue

$$\boxed{\begin{aligned} \rho(\vec{r},t) &= \sum_i e_i\,\delta(\vec{r}-\vec{r_i}) \qquad (1)\\ \vec{J}(\vec{r},t) &= \sum_i e_i\,\vec{v_i}\,\delta(\vec{r}-\vec{r_i}) \qquad (2)\end{aligned}}$$

dove $\vec{r_i}$ e $\vec{v_i}$ rappresentano rispettivamente posizione e velocità della carica e_i.

Per una data distribuzione di densità di carica e di densità di corrente il campo risultante è determinato da un insieme di equazioni di campo le EQUAZIONI DI MAXWELL che nel vuoto e nel sistema cgs gaussiano si scrivono come segue:

$$\boxed{\begin{aligned} &\vec{\nabla}\cdot\vec{E} = 4\pi\rho \\ &\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0 \\ &\vec{\nabla}\times\vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = 0 \\ &\vec{\nabla}\times\vec{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\vec{J} \end{aligned}}$$

(3)
(4)
(5)
(6)

dove c è la velocità della luce nel vuoto.
Le equazioni di Maxwell costituiscono un sistema di otto equazioni alle derivate parziali a cui si devono ~~im~~porre le opportune condizioni al contorno.

Vediamole in dettaglio.

I - $\bar{\nabla}\cdot\bar{E} = 4\pi\rho$ TEOREMA DI GAUSS IN FORMA DIFFERENZIALE

Ricordiamo la definizione di divergenza di un vettore $\vec{v}$

$$\vec{\nabla}\cdot\vec{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z}$$

e il Teorema della divergenza che ci assicura che il flusso $\Phi_S(\vec{v})$ di un vettore attraverso una superficie chiusa qualsiasi S è uguale all'integrale della divergenza di $\vec{v}$ esteso a tutto il volume V racchiuso da S.

$$\Phi_S(\vec{v}) \doteq \int_S \vec{v}\cdot\vec{n}\,ds = \int_V \vec{\nabla}\cdot\vec{v}\,dV$$

$\vec{n}$ → vettore unitario normale uscente dall'elemento di superficie

Per quanto appena detto risulta chiaro che la prima equazione di Maxwell lega il valore della densità di carica in un punto al valore della divergenza del campo elettrico nello stesso punto e quindi il flusso di $\vec{E}$ attraverso una superficie chiusa che racchiude un volume ~~...~~ V alla carica contenuta in quel volume.

II $\quad \bar{\nabla}\cdot\bar{B} = 0 \qquad$ TEOREMA DI GAUSS PER IL CAMPO MAGNETICO

alla luce di quanto appena detto per il campo elettrico questa equazione, che vale anche per la materia, chiarisce che non esistono cariche magnetiche isolate analoghe alle cariche elettriche visto che attraverso qualsiasi superficie chiusa il flusso del campo magnetico sarà sempre nullo, cioè, come si dice comunemente, il campo magnetico è sempre solenoidale in qualunque punto dello spazio.

III $\quad \bar{\nabla}\times\bar{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial\bar{B}}{\partial t} = 0 \qquad$ LEGGE DELL'INDUZIONE O DI FARADAY-HENRY-NEUMANN

Affinché un circuito sia sede di corrente indotta è necessario far variare il flusso del vettore $\bar{B}$ concatenato al circuito.

Ricordiamo che il rotore di un vettore $\vec{v}$ è ancora un vettore che si calcola come segue

$$\mathrm{rot}\,\vec{v} = \vec{\nabla}\times\vec{v} = \det\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ v_x & v_y & v_z \end{vmatrix} =$$

$$= \hat{i}\,\frac{\partial v_z}{\partial y} + \hat{j}\,\frac{\partial v_x}{\partial z} + \hat{k}\,\frac{\partial v_y}{\partial x} - \hat{k}\,\frac{\partial v_x}{\partial y} - \hat{j}\,\frac{\partial v_z}{\partial x} - \hat{i}\,\frac{\partial v_y}{\partial z}$$

$$= \left(\frac{\partial v_z}{\partial y} - \frac{\partial v_y}{\partial z}\right)\hat{i} + \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} - \frac{\partial v_z}{\partial x}\right)\hat{j} + \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)k$$

Alternativamente

$$\left(\bar{A}\times\bar{B}\right)_i \doteq \varepsilon_{ijk}\, A_j B_k$$

gli indici j e k (ripetuti) si intendono sommati.

con $\varepsilon_{ijk} = +1$ per l'ordine naturale e -1 $\forall$ permutazione

è un tensore antisimmetrico quindi è nullo per indici uguali

per esempio

$$\left(\bar{A}\times\bar{B}\right)_1 = \underbrace{\varepsilon_{123}}_{=1} A_2 B_3 + \underbrace{\varepsilon_{132}}_{=-1} A_3 B_2$$

e

$$\left(\vec{\nabla}\times\vec{B}\right)_1 = \varepsilon_{123}\,\nabla_2 B_3 + \varepsilon_{132}\,\nabla_3 B_2 =$$

$$= \frac{\partial B_z}{\partial y} - \frac{\partial B_y}{\partial z}$$

c.v.d. (come sopra)

Ricordiamo inoltre che, data una grandezza scalare u si definisca suo gradiente il vettore $\vec{v}$ /

$$\vec{v} = \mathrm{grad}\,u = \frac{du}{dx}\hat{i} + \frac{du}{dy}\hat{j} + \frac{du}{dz}\hat{k}$$

Il teorema della rotazione dice che

$$\oint \vec{v} \cdot d\vec{l} = \int_S (\vec{\nabla} \times \vec{v}) \cdot \vec{n}\, dS$$

un vettore si dice conservativo se è nulla la sua circuitazione, cioè l'integrale lungo una linea chiusa

$$\oint \vec{v} \cdot d\vec{l} = 0$$

Allora esiste un campo scalare u / $\vec{v} = \text{grad}\, u$

La legge di Faraday-Henry-Neumann dedotta sperimentalmente afferma che la circuitazione del campo elettrico lungo una linea chiusa è uguale alla derivata temporale del flusso magnetico attraverso una qualsiasi superficie aperta S, che ha come contorno la linea chiusa, cambiata di segno

$$\oint \bar{E} \cdot d\bar{l} = -\frac{1}{c}\frac{d}{dt} \int_S \bar{B} \cdot \vec{n}\, dS$$

<u>NOTA</u> ricordiamo che

$$E = E_{indotto} + E_{statico}$$

$E_{statico}$ ↓ conservativo

$$\text{fem} \doteq \oint \bar{E}_i \cdot d\bar{l} \neq 0$$

conseguenza generale di questa legge è che il campo elettrico non è conservativo.

IV $$\bar{\nabla} \times \bar{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\vec{J}$$ LEGGE DI AMPERE-MAXWELL

Anche un campo elettrico variabile è sorgente di campo magnetico.
La legge di Ampere-Maxwell generalizza il teorema

della circuitazione di Ampere (valida per campi statici) ad una situazione qualsiasi.

$$\oint \bar{B}\cdot d\bar{\ell} = \frac{4\pi}{c}\, i + \underbrace{\frac{1}{c}\,\frac{d\Phi_E}{dt}}_{(\xi)}$$

→ termine aggiunto da Maxwell, detta corrente di spostamento.

Questa equazione esprime il fatto che esistono due modi diversi per generare un campo magnetico: utilizzando una corrente elettrica oppure facendo variare un campo elettrico.
Il termine (ξ) fu aggiunto da Maxwell sulla base di considerazioni teoriche, impose la conservazione della carica, e fu verificata la legge negli anni seguenti. (si veda a pag. 7 come dalla (6) si ricava direttamente la conservazione della carica)

Il moto di particelle cariche in un campo elettromagnetico, e quindi come vedremo anche l'interazione tra la materia e il campo elettromagnetico, è descritto in termini di <u>densità di forza di Lorentz</u> nel seguente modo

$$\boxed{\vec{f}_L = \rho\left(\vec{E} + \frac{1}{c}\,\vec{v}\times\vec{B}\right)} \qquad (7)$$

dove $\bar{f}_L$ è la densità di forza esercitata dal campo sulla distribuzione di particelle cariche, cioè la forza per unità di volume.

II - CONSERVAZIONE DELLA CARICA

Per la densità di carica $\rho(\vec{r},t)$ vale l'equazione di continuità la quale esprime la conservazione della carica elettrica e si può ricavare direttamente dalle equazioni di Maxwell.

Prendendo la divergenza dell'ultima equazione di Maxwell (6)

$$\underbrace{\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{B})}_{=} - \frac{1}{c}\frac{\partial\,\vec{\nabla}\cdot\vec{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\vec{\nabla}\cdot\vec{J}$$

(0 perchè è sempre nulla la divergenza di un rotore
dimostrato a pag. 11)

e sostituendo poi la $\vec{\nabla}\cdot\vec{E}$ con $4\pi\rho$ (eq. (3)) otteniamo

$$\frac{1}{c}\frac{\partial\, 4\pi\rho}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\vec{\nabla}\cdot\vec{J} = 0$$

EQUAZIONE DI CONTINUITÀ PER LA CARICA

$$\boxed{\frac{\partial\rho}{\partial t} + \vec{\nabla}\cdot\vec{J} = 0} \qquad (8)$$

Se integriamo questa equazione in un volume V racchiuso da una superficie S, e applichiamo il teorema della divergenza, l'equazione di continuità diventa

$$-\frac{\partial}{\partial t}\int_V \rho\, d^3r = \int_S \vec{J}\cdot\vec{n}\, dS = \Phi_S(\vec{J})$$

Quest'ultima equazione descrive matematicamente la conservazione della carica perchè ci dice che il "rate" (tasso) del quale diminuisce la carica dentro il volume V è equivalente al rate al quale esce passando attraverso la superficie chiusa S che racchiude il volume V.

III - CONSERVAZIONE DELL' ENERGIA

Prendiamo le due equazioni di Maxwell che contengono il termine di rotore, i.e. la (5) e la (6) e moltiplicandole rispettivamente per $\vec{B}$ e per $\vec{E}$, scalarmente.
Sottraendo poi la (6) alla (5) otteniamo

$$\vec{B}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{E}) + \frac{1}{c}\,\vec{B}\cdot\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} = 0$$

$$-\left[\vec{E}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{B}) - \frac{1}{c}\,\vec{E}\cdot\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\,\vec{E}\cdot\vec{J}\right]$$

$$= \left[\frac{1}{c}\left(\vec{B}\cdot\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} + \vec{E}\cdot\frac{\partial \vec{E}}{\partial t}\right) = -\frac{4\pi}{c}\vec{E}\cdot\vec{J} - \left(\vec{B}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{E}) - \vec{E}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{B})\right)\right]$$

Prima di procedere con la dimostrazione proviamo la validità della seguente formula

$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{E}\times\vec{B}) = \vec{B}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{E}) - \vec{E}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{B})$$

utilizziamo la già enunciata regola del prodotto vettoriale $(\vec{A}\times\vec{B})_i = \varepsilon_{ijk} A_j B_k$ per dimostrare che il primo membro è uguale al secondo:

$$\vec{\nabla}\cdot(\vec{E}\times\vec{B}) = \partial_i\cdot(\vec{E}\times\vec{B})_i =$$

$$= \partial_i\cdot(\varepsilon_{ijk}E_j B_k) = \varepsilon_{ijk}\left[(\partial_i E_j)B_k + (\partial_i B_k)E_j\right] =$$

$$= B_k\Big[\underbrace{(\varepsilon_{ijk})}_{=\,\varepsilon_{kij}}\partial_i E_j\Big] + E_j\Big[\underbrace{(\varepsilon_{ijk})}_{=\,-\varepsilon_{jik}}\partial_i B_k\Big] =$$

$$= \vec{B}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{E}) - \vec{E}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{B}) \qquad \text{C.V.D.}$$

Quindi l'equazione che avevamo lasciato in sospeso diventa

$$\frac{1}{4\pi\,\cancel{c}}\left(\vec{B}\cdot\frac{\partial\vec{B}}{\partial t}+\vec{E}\cdot\frac{\partial\vec{E}}{\partial t}\right)=-\frac{\cancel{4\pi}}{c}\,\vec{J}\cdot\vec{E}-\vec{\nabla}\cdot(\vec{E}\times\vec{B})\cdot\frac{c}{4\pi}$$

$$\frac{1}{4\pi}\cdot\frac{1}{2}\,\frac{\partial}{\partial t}\left(E^2+B^2\right)=-\vec{J}\cdot\vec{E}-\frac{c}{4\pi}\,\vec{\nabla}\cdot(\vec{E}\times\vec{B})$$

Definiamo ora le due quantità seguenti:

$$(9)\qquad \boxed{\vec{S}=\frac{c}{4\pi}\,\vec{E}\times\vec{B}}\qquad \text{VETTORE DI POYNTING O DELL'IRRAGGIAMENTO}$$

$$(10)\qquad \boxed{\mathcal{E}=\frac{1}{8\pi}\left(E^2+B^2\right)}\qquad \text{DENSITÀ DI ENERGIA}$$

Si può dimostrare (non lo faremo qui) che il vettore di Poynting $\vec{S}=c^2\vec{g}$ con $\vec{g}$ densità di momento del campo EM.

Con le (9) e (10) otteniamo

$$\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial t}=-\vec{J}\cdot\vec{E}-\vec{\nabla}\cdot\vec{S}$$

Integrando sul volume V e utilizzando il teorema della divergenza ottengo

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_V \mathcal{E}\,d^3r=-\int_V \vec{J}\cdot\vec{E}\,d^3r-\int_S \vec{S}\cdot\vec{n}\,ds$$

→ densità di energia del campo EM

→ derivata dell'energia cinetica

→ Energia che fluisce nell'unità di tempo attraverso l'unità di superficie.

Vediamo perché.

Se il volume contiene particelle di carica e_i che si muovono a velocità $\vec{v}_i$ allora, utilizzando la definizione di $\vec{J}$ (2) abbiamo

$$\int_V \vec{J}\cdot\vec{E}\, d^3r = \sum_i e_i \vec{v}_i \cdot \vec{E}_i$$

dove $\vec{E}_i \equiv \vec{E}(\vec{r}_i)$. Inoltre se chiamiamo T_i l'energia cinetica dell' i-sima particella allora, utilizzando la forza di Lorentz $\vec{F}_i$ otteniamo per ciascuna particella

$$\frac{\partial T_i}{\partial t} = \vec{F}_i \cdot \vec{v}_i = e\vec{v}_i \cdot \left(\vec{E}_i + \frac{1}{c}\vec{v}_i \times \vec{B}_i\right) = e_i \vec{v}_i \cdot \vec{E}_i$$

la nostra equazione allora diventa

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\int_V \mathcal{E}\, d^3r + \sum_i T_i\right) = -\int_S \vec{S}\cdot\vec{n}\, ds$$

ora osserviamo che se l'integrazione è estesa a tutto lo spazio l'integrale di superficie scompare (il campo è nullo all'infinito e quindi anche $\vec{S}$) -
Allora otteniamo

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\int_V \mathcal{E}\, d^3r + \sum_i T_i\right) = 0$$

Ne segue che per un sistema chiuso composto da un campo elettromagnetico e delle cariche, la grandezza tra parentesi si conserva. Il secondo termine di questa espressione è l'energia cinetica, il primo termine è quindi identificabile con l'energia del campo EM stesso.
Quando integriamo su un volume finito l'integrale di superficie $\oint \vec{S}\cdot\vec{n}\, ds$ in generale non scompare e rappresenta il flusso di energia del campo attraverso S e quindi $\vec{S}$ è la densità di questo flusso ossia la quantità di energia del campo che può attraversare l'unità di superficie nell' unità di tempo.

Data la forma generale delle equazioni di Maxwell un campo EM può essere scritto in termini di un potenziale scalare ϕ e un potenziale vettore $\vec{A}$.
In particolare il fatto che $\vec{\nabla}\cdot\vec{B}=0$ implica che

$$\boxed{\vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A}} \qquad (11)$$

poiché la divergenza di un rotore è nulla.
(abbiamo già usato questa proprietà nella dim. della conservazione della carica)

dim $\vec{\nabla}\cdot(\vec{\nabla}\times\vec{B}) = \partial_i \cdot (\varepsilon_{ijk}\, \partial_j B_k)$

ε_{ijk} ↑ tensore antisimmetrico $\qquad \partial_i\partial_j$ → tensore simmetrico

$$\Rightarrow \quad \varepsilon_{ijk}\,\partial_i\partial_j = \underset{\substack{\uparrow\\ \text{perché simmetrico}}}{\varepsilon_{ijk}\,\partial_j\partial_i} = \underset{\substack{\uparrow\\ \text{ora rinomino gli indici } i\leftrightarrow j}}{\varepsilon_{jik}\,\partial_i\partial_j}$$

ma $\varepsilon_{ijk} = -\varepsilon_{jik}$ quindi l'ultima uguaglianza sopra è verificata solo se i due membri sono nulli c.v.d.

Sostituendo la (11) nella legge di Faraday diventa

$$\vec{\nabla}\times\left(\vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right) = 0$$

da cui segue che $\exists\ \phi$ potenziale scalare /

$$\vec{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t} = -\vec{\nabla}\phi$$

perché $\vec{\nabla}\times(\vec{\nabla}\Phi) = 0$

$$\boxed{\vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial A}{\partial t} - \vec{\nabla}\Phi} \qquad (12)$$

Le scelte (11) e (12) per $\vec{A}$ e ϕ non le definiscono in modo univoco. Infatti la (11) è definita a meno di un vettore di rotazione nulla.

Allora

$$\boxed{\vec{A}' = \vec{A} + \vec{\nabla}\chi} \qquad (13)$$

dove $\vec{\nabla}\chi$ è il mio vettore di rotazione nulla.
Ora se sostituiamo la (13) nella (12) otteniamo

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\vec{A}' + \vec{\nabla}\chi\right) \doteq -\vec{\nabla}\phi' - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}'}{\partial t}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\Phi' = \Phi + \frac{1}{c}\frac{\partial \chi}{\partial t}} \qquad (14)$$

dove $\chi(\vec{r},t)$ è una funzione arbitraria.
La (14) è necessaria affinché le (13) non faccia cambiare anche $\vec{E}$.

Quindi i campi fisicamente significativi $\vec{E}$ e $\vec{B}$ sono inalterati sotto le trasformazioni (13) e (14) note come TRASFORMAZIONI DI GAUGE (= CALIBRATURA). Si dice dunque che il campo esibisce invarianza di gauge.
È possibile dunque trovare le equazioni che soddisfano $\vec{A}$ e ϕ dopo aver "scelto la gauge", cioè aver ristretto il valore di χ imponendo una condizione addizionale su $\vec{A}$.

Espresse in termini dei potenziali $\vec{A}$ e Φ le (13)
equazioni di Maxwell (4) e (5) sono soddisfatte automaticamente mentre le altre due diventano

(NOTA: LAPLACIANO $\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$
$= \vec{\nabla} \cdot \vec{\nabla} f = \mathrm{div}(\mathrm{grad}\, f)$
in gen. può essere applicato sia ad uno scalare che ad un vettore)

$$\vec{\nabla} \cdot \vec{E} = 4\pi \rho \rightarrow$$

$$\rightarrow \boxed{-\nabla^2 \phi - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) = \underbrace{\Box \phi - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{c}\frac{\partial \phi}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{A}\right)} = 4\pi\rho} \quad (15)$$

ho ~~sommato~~ sommato e sottratto $\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Phi$

e $\vec{\nabla} \times \vec{B} - \frac{1}{c}\frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\vec{J} \rightarrow$

$$\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla}\phi\right) = \frac{4\pi}{c}\vec{J}$$

ma $\vec{\nabla} \times (\vec{\nabla} \times \vec{A}) = \vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$.

$$\vec{\nabla}(\vec{\nabla} \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A} - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\left(-\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} - \vec{\nabla}\phi\right) = \frac{4\pi}{c}\vec{J}$$

$$+\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\vec{A} - \vec{\nabla}^2 \vec{A} + \vec{\nabla}\left(\frac{1}{c}\frac{\partial \phi}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{A}\right) = \frac{4\pi}{c}\vec{J}$$

$$\boxed{\Box \vec{A} + \vec{\nabla}\left(\frac{1}{c}\frac{\partial \phi}{\partial t} + \vec{\nabla} \cdot \vec{A}\right) = \frac{4\pi}{c}\vec{J}} \quad (16)$$

dove $\Box$ è l'operatore di D'Alembert

$$\Box \equiv \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \nabla^2 = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

Notiamo che la non osservabilità dei potenziali è vera in meccanica classica ma non in elettrodinamica quantistica dove vale ancora l'invarianza di Gauge ma i potenziali hanno una influenza osservabile sulle F.d.o.

Prima di proseguire con la scelta di gauge dimostriamo la formula

$$\vec\nabla\times(\vec\nabla\times\vec A) = \vec\nabla(\vec\nabla\cdot\vec A) - \nabla^2\vec A$$

$$[\vec\nabla\times(\vec\nabla\times\vec A)]_1 = \varepsilon_{1jk}\,\partial_j(\vec\nabla\times\vec A)_k \quad \text{con } j\neq k\neq 1$$

$$= \varepsilon_{123}\,\partial_2(\vec\nabla\times\vec A)_3 + \varepsilon_{132}\,\partial_3(\vec\nabla\times\vec A)_2 =$$

$$= \overset{+1}{\varepsilon_{123}}\,\partial_2\left[\overset{+1}{\varepsilon_{312}}\,\partial_1 A_2 + \overset{-1}{\varepsilon_{321}}\,\partial_2 A_1\right] + \overset{-1}{\varepsilon_{132}}\,\partial_3\left[\overset{-1}{\varepsilon_{213}}\,\partial_1 A_3 + \overset{+1}{\varepsilon_{231}}\,\partial_3 A_1\right] =$$

aggiungo e sottraggo $\partial_1^2 A_1$

$$= \partial_1\partial_2A_2 - \partial_2^2A_1 + \partial_1\partial_3A_3 - \partial_3^2A_1 =$$

$$\partial_1(\partial_2A_2+\partial_3A_3+\partial_1A_1) - (\partial_2^2+\partial_3^2+\partial_1^2)A_1$$

$$\vec\nabla(\vec\nabla\cdot\vec A)_1 - (\nabla^2\vec A)_1$$

C.V.D.

NOTA GAUGE DI LORENTZ

Una gauge invariante sotto le trasf. ni di Lorentz della relatività speciale è quella di Lorentz

$$\vec\nabla\cdot\vec A + \frac{1}{c}\frac{\partial\phi}{\partial t} = \vec\nabla\cdot\vec A' + \frac{1}{c}\frac{\partial\Phi'}{\partial t} = 0 \Rightarrow \Box\chi = 0$$

In questa gauge le equazioni per Φ e $\vec A$ sono naturalmente disaccoppiate

$$\begin{cases}\Box\Phi = 4\pi\rho \\ \Box\vec A = \frac{4\pi}{c}\vec J\end{cases}$$ che nel vuoto diventano $$\begin{cases}\Box\Phi = 0 \\ \Box\vec A = 0\end{cases}$$

V - GAUGE DI COULOMB

Una gauge che si dimostra particolarmente adatta alla quantizzazione del campo di radiazione puro ($\rho = 0$) è quella di Coulomb o gauge trasversale.
Si richiede che

$$\boxed{\vec{\nabla}\cdot\vec{A} = \vec{\nabla}\cdot\vec{A}' = 0} \qquad (17)$$

poiché dalla (13) $\bar{\nabla}\cdot\bar{A}' = \bar{\nabla}\cdot\bar{A} - \nabla^2\chi$ la gauge di Coulomb richiede che

$$\boxed{\nabla^2\chi = 0} \qquad (18)$$

cioè che $\chi(\vec{r},t)$ soddisfi l'equazione di Laplace.
Prendendo la divergenza della (12) otteniamo

$$\bar{\nabla}\cdot\vec{E} = -\nabla^2\phi - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\underbrace{\bar{\nabla}\cdot\bar{A}}_{0} = -\nabla^2\phi$$

e dall'espressione di Gauss vediamo che

$$\boxed{\nabla^2\phi = -4\pi\rho} \qquad (19)$$

quindi ad ogni istante il potenziale scalare soddisfa l'equazione di Poisson: cioè è determinato dalle cariche elettriche come se fossero in quiete. Da qui il nome della gauge.
Nella gauge di Coulomb le equazioni (15) e (16) diventano dunque rispettivamente la (19) appena scritta e

$$\square\vec{A} + \vec{\nabla}\left(\frac{1}{c}\frac{\partial\phi}{\partial t}\right) = \frac{4\pi}{c}\vec{J}$$

Disaccoppiamo ora $\vec{A}$ e Φ

~~Nota~~ Ora decomponiamo la densità di corrente in una componente longitudinale $\vec{J}_L$ e in una trasversale $\vec{J}_T$ dove

$$\vec{\nabla} \times \vec{J}_L = 0 \quad \text{e} \quad \vec{\nabla} \cdot \vec{J}_T = 0$$

[NOTA: $\vec{J} = \vec{J}_L + \vec{J}_T$ segue dal teorema di Helmotz che afferma che ogni campo vettoriale può essere scritto come somma di una componente irrotazionale (longitudinale) che ha rotore nullo e una componente trasversa che ha divergenza nulla.]

Ora mostreremo che il termine $\vec{\nabla}\left(\frac{1}{c}\frac{\partial \phi}{\partial t}\right)$ della nostra equazione per $\vec{A}$ cancella esattamente la componente longitudinale della densità di corrente.

Differenziamo la (19) rispetto al tempo e riaggiustiamola:

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{1}{4\pi} \vec{\nabla} \frac{\partial \phi}{\partial t}\right) + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

utilizzando l'equazione di continuità per la carica otteniamo

$$\vec{\nabla} \cdot \left(\frac{1}{4\pi} \vec{\nabla} \frac{\partial \phi}{\partial t}\right) - \vec{\nabla} \cdot \vec{J} = \vec{\nabla} \cdot \left(\frac{1}{4\pi} \vec{\nabla} \frac{\partial \phi}{\partial t} - \vec{J}_L\right) = 0$$

da cui

$$\frac{1}{\cancel{4\pi}} \vec{\nabla} \frac{\partial \phi}{\partial t} = 4\pi \vec{J}_L$$

Quindi l'equazione per il potenziale vettore si riduce a

$$\boxed{-\nabla^2 \vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 \vec{A}}{\partial t^2} = \frac{4\pi}{c} \vec{J}_T} \qquad (20)$$

La gauge di Coulomb è detta talvolta gauge
trasversa perchè il termine che contiene la sorgente nell'equazione per $\vec{A}$ dipende solo da $\vec{J}_T$.

Nel caso in cui si voglia studiare un campo di radiazione puro, quindi la radiazione presente nel vuoto $\Rightarrow$ $\rho = 0$ e $\vec{J} = 0$ quindi la (19) diventa

$$\nabla^2 \phi = 0$$

$\Rightarrow$ per noi è conveniente prendere $\phi = 0$ che è soluzione.

Quindi per il campo di radiazione puro è necessario trovare solo il potenziale vettore risolvendo l'equazione

$$-\nabla^2 \vec{A} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = 0$$

$$\boxed{\Box \vec{A} = 0} \qquad (21)$$

con $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$

$$\begin{cases} \rho = 0 \\ \vec{J} = 0 \\ \Phi = 0 \\ \vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} \\ \vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \end{cases}$$

Un campo vettoriale che soddisfa la condizione di Lorentz $\vec{\nabla} \cdot \vec{A} = 0$ è detto trasverso poichè se assumiamo un'onda piana come soluzione

$$\vec{A}(\vec{r}, t) = \vec{A}_0 \, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega t)}$$

allora

$$\boxed{\vec{k} \cdot \vec{A} = 0} \qquad (22)$$

cioè $\vec{A} \perp \vec{k}$ dove $\vec{k}$ è la direzione di propagazione dell'onda.

$\vec{k}$ e ω rappresentano vettore d'onda e frequenza angolare rispetti variabile, dell'onda armonica.

VI - FUNZIONE HAMILTONIANA CLASSICA PER UN SISTEMA DI CARICHE ELETTRICHE IN UN CAMPO DI RADIAZIONE

Nel caso in cui la radiazione sia di intensità elevata è possibile trattare classicamente il campo associato, mentre gli atomi debbono sempre essere descritti in termini di meccanica ondulatoria.
Nel caso di campi deboli anche la radiazione deve essere trattata con la meccanica ondulatoria.
In entrambi i casi il primo passo consiste nello scrivere una funzione Hamiltoniana classica in grado di descrivere correttamente l'azione del campo sulle cariche.
Dimostreremo fra breve che la funzione Hamiltoniana di un sistema di cariche, quali ad esempio elettroni e nuclei, in moto in un campo EM esterno ed interagenti tra loro tramite forze coulombiane, è data da

$$\boxed{H = \sum_i \left\{ \frac{\left[\vec{p}_i - \frac{e_i}{c}\vec{A}(\vec{r}_i)\right]^2}{2m_i} + e_i\,\phi(\vec{r}_i) \right\} + V(x_1,\dots,z_N) + \frac{1}{8\pi}\int \left(E^2+B^2\right) d^3r} \qquad (23)$$

m_i → massa della i-sima particella
e_i → carica
$\vec{p}_i$ → quantità di moto della particella

$V(x_1 \dots z_N)$ energia potenziale dell'interazione coulombiana fra coppie di particelle.
Questa Hamiltoniana non è del tutto completa per un sistema atomico. Essa non tiene conto delle

interazioni magnetiche (elettrone o nucleo con spin) e ~~dei termini~~ delle correzioni relativistiche.
~~Per gli scopi di questo corso~~
Per lo studio dei processi di emissione, assorbimento e diffusione della luce in approssimazione di dipolo questa Hamiltoniana è sufficiente a riprodurre tuttavia i risultati sperimentali.
Dimostriamo ora, scrivendo le equazioni di Hamilton corrispondenti all'Hamiltoniana (23), come queste portino alle equazioni del moto corrette per le particelle cariche. La prima delle equazioni di Hamilton è:

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_{xi}} = \frac{1}{m_i}\left[p_{xi} - \frac{e_i}{c} A_x(\vec{r}_i)\right]$$

questa equazione mostra che in presenza di un potenziale vettore la quantità di moto non è uguale al prodotto della massa per la velocità ma contiene un termine addizionale $\frac{e_i}{c}\vec{A}_i(\vec{r}_i)$

$$\boxed{\vec{P}_i = m_i \vec{v}_i + \frac{e_i}{c}\vec{A}(\vec{r}_i)} \qquad (24)$$

La seconda equazione di Hamilton è

$$\frac{dp_{xi}}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i}$$

$$\frac{d}{dt}\left[m_i \frac{dx_i}{dt} + \frac{e_i}{c} A_x(\vec{r}_i)\right] = m_i \frac{d^2x_i}{dt^2} + \frac{d}{dt}\frac{e_i}{c} A_x(\vec{r}_i) =$$

$$= -\frac{\partial H}{\partial x_i}$$

Ora osserviamo che l'Hamiltoniano (23) dipende da x_i tramite ϕ, V e $\vec{A}$.

Analogamente il termine $A_x(\vec{r}_i)$ dipende dal tempo non solo perchè $A_x(\vec{r}_i)$ può essere funzione esplicita di t ma anche attraverso $\vec{r}_i$.

L'equazione allora diventa:

$$\frac{e_i}{m_i c}\left\{\left[p_{x_i}-\frac{e_i}{c}A_x(\vec{r}_i)\right]\frac{\partial A_x(\vec{r}_i)}{\partial x_i}+\left[p_{iy}-\frac{e_i}{c}A_y(\vec{r}_i)\right]\frac{\partial A_y(\vec{r}_i)}{\partial x_i}\right.$$

$$\left.+\left[p_{z_i}-\frac{e_i}{c}A_z(\vec{r}_i)\right]\frac{\partial A_z(\vec{r}_i)}{\partial x_i}\right\}-e_i\frac{\partial\phi(\vec{r}_i)}{\partial x_i}-\frac{\partial V}{\partial x_i}=$$

$$=m_i\frac{d^2x_i}{dt^2}+\frac{e_i}{c}\left[\frac{\partial}{\partial t}A_x(\vec{r}_i)+\frac{\partial}{\partial x_i}A_x(\vec{r}_i)\frac{dx_i}{dt}+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial}{\partial y_i}A_x(\vec{r}_i)\frac{dy_i}{dt}+\frac{\partial}{\partial z_i}A_x(\vec{r}_i)\frac{dz_i}{dt}\right]$$

Se ora sostituiamo ai termini fra parentesi quadre al I membro $m\frac{dx_i}{dt}$ $\left(\frac{dy_i}{dt}\text{ ecc}\right)$ (eq. 2a) otteniamo

$$m_i\frac{d^2x_i}{dt^2}=-e_i\frac{\partial\phi(\vec{r}_i)}{\partial x_i}-\frac{\partial V}{\partial x_i}-\frac{e_i}{c}\frac{\partial}{\partial t}A_x(\vec{r}_i)+$$

$$+\frac{e_i}{c}\left\{\frac{dy_i}{dt}\left[\frac{\partial A_y(\vec{r}_i)}{\partial x_i}-\frac{\partial A_x(\vec{r}_i)}{\partial y_i}\right]+\right.$$

$$\left.-\frac{dz_i}{dt}\left[\frac{\partial A_x(\vec{r}_i)}{\partial z_i}-\frac{\partial A_z(\vec{r}_i)}{\partial x_i}\right]\right\}$$

Ora analizziamo i termini al II membro

$-\frac{\partial V}{\partial x_i}$ → componente x della forza che agisce sulla particella i-sima prodotta dall'energia imperturbata V.

$$e_i\left[-\frac{\partial\phi(\vec{r}_i)}{\partial x_i}-\frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}A_x(\vec{r}_i)\right]=e_i\vec{E}_i\Big|_x\quad\left(\text{perchè } \vec{E}=-\nabla\phi-\frac{1}{c}\frac{\partial\vec{A}}{\partial t}\right)$$

I termini rimasti sono proporzionali $(\nabla \times \vec B|_x)$ $[B = \nabla \times \vec A]$

In altri termini ci siamo ricondotti esattamente alle equazioni del moto di Newton per una particella soggetta alla:

$$\vec f_i = \rho_i \left\{ \vec E(\vec r_i) + \frac{1}{c}\left[\vec v_i \times B(\vec r_i)\right] \right\}$$

Quindi l'Hamiltoniano di interazione conduce alla corretta espressione per una particella carica che si muove in un campo esterno.

Ora scriviamo l'Hamiltoniano come somma di tre pezzi. Due imperturbati e uno di interazione

$$\boxed{\begin{aligned} H_0^{rad} &= \frac{1}{8\pi}\int (E^2 + B^2)\, d^3r \\ H_0^{CARICHE} &= \sum_i \frac{p_i^2}{2m} + V(x_1 \dots z_N) \\ &\text{e} \\ H_1^{INT} &= \sum_i \left[-\frac{e_i \vec p \cdot \vec A(\vec r_i)}{c\, m_i} + \frac{e_i^2 \vec A^2(\vec r_i)}{2 m_i c^2} + e_i \phi(\vec r_i) \right] \end{aligned}} \quad (25)$$

Vediamo quindi tre tipi di termini introdotti dal campo esterno: quello lineare in $\vec A$, quello quadratico e quello in ϕ. Un campo di radiazione abbiamo visto che può ~~essere~~ descritto ~~solo~~ da $\vec A^*$ ($\phi = 0$). H^{INT} con $\Phi = 0$ sarà utilizzato per calcolare I e II ordine in teoria delle perturbazioni in approx. di dipolo dopo aver quantizzato il campo di radiazione ~~[illegible]~~ puro.

~~DALLA TEORIA DELL'ELETTRONE CON LO SPIN~~
~~L'HAMILTONIANA DI INTERAZIONE CON UN CAMPO ESTERNO~~

IL CAMPO DI RADIAZIONE PURA: COORDINATE DI CAMPO CLASSICHE

Studiamo ora le oscillazioni proprie del campo. Ricordiamo che per il campo di radiazione pura

$$\Box \vec{A}(\vec{r},t) = 0 \qquad \text{con} \qquad \vec{\nabla}\cdot\vec{A} = 0 \quad \text{(gauge di Coulomb)}$$

$$\begin{cases} \vec{B} = \vec{\nabla}\times\vec{A} \\ \vec{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \end{cases} \qquad \text{inoltre} \quad \rho = 0,\ \vec{J} = 0 \ \text{e}\ \phi = 0$$

Abbiamo ~~detto~~ che per una trattazione dettagliata dell'interazione della radiazione con la materia per campi non molto intensi è necessaria una trattazione quantistica del campo e.m. Questo si ottiene decomponendo il potenziale vettore in una sovrapposizione di modi del campo. Mostreremo che ciascun modo equivale a un oscillatore armonico semplice, che può essere ~~[illegible]~~ quantizzato come visto in meccanica quantistica. Si introduce in questo modo il concetto di fotone.

La transizione da un campo elettromagnetico classico ad uno quantistico si basa sul rimpiazzare il potenziale vettore $\vec{A}$ con il corrispondente operatore quanto meccanico $\hat{A}$.

Prima però bisogna scrivere $\vec{A}$ in una forma che è quantizzabile.

La soluzione più generale per ~~onde piane che~~ l'equazione ~~[illegible]~~ $\Box \vec{A}(\vec{r},t) = 0$ è una sovrapposizione di onde piane della forma

$$A_{\vec{k}\lambda}\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega_k t)}\, \vec{\varepsilon}_{\vec{k}\lambda}$$

ciascuna onda piana è un modo

caratterizzato da un suo vettore d'onda $\vec{k}$, con un'ampiezza $A_{k\lambda}$ associata e una frequenza

$$\boxed{\omega_k = ck} \quad (26)$$

La POLARIZZAZIONE, ovvero la direzione, di $\vec{A}$ $\forall k$ è specificata dal vettore unitario $\bar{\varepsilon}_{k\lambda}$. Esso è perpendicolare a $\vec{k}$ a causa della condizione di gauge $\vec{k}\cdot\vec{\varepsilon}_{k\lambda} = 0$. Poiché esistono due scelte linearmente indipendenti per la polarizzazione $\lambda = 1, 2$ e quindi $\forall \vec{k}$ $\exists$ due onde che viaggiano che gli sono associate.

In generale nello spazio infinito $\exists$ un numero infinitamente non numerabile di modi permessi. Ai fini della quantizzazione risulta vantaggioso lavorare in una cavità cubica di lato L soggetta alle condizioni al contorno periodiche

$$A(x,y,z,t) = A(x+L,y,z,t) = A(x,y+L,z,t) = A(x,y,z+L,t)$$

queste implicano

$$e^{ik_xL} = e^{ik_yL} = e^{ik_zL} = 1$$

Come risultato

$$k_x = \frac{2\pi n_x}{L}, \quad k_y = \frac{2\pi n_y}{L}, \quad k_z = \frac{2\pi n_z}{L} \quad (n_x, n_y, n_z = 0, \pm 1, \dots)$$

Quindi i gradi di libertà (ancora infiniti) sono ora numerabili. Questo rende naturale decomporre il potenziale vettore in una serie di Fourier costruita dai modi della cavità permessi

$$(27) \quad \boxed{\vec{A}(\vec{r},t) = \sum_{\vec{k},\lambda} \left[A_{\vec{k}\lambda}\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega_k t)} + A_{-\vec{k}\lambda}\, e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r} - \omega_k t)} \right] \bar{\varepsilon}_{k\lambda}}$$

I due termini rappresentano le onde che viaggiano in direzioni opposte.

Inoltre deve essere $A_{-k,\lambda} = A^{*}_{k\lambda}$ perché il pot. vettore è reale. (24)

Dall'espressione per il potenziale vettore è possibile scrivere i campi $\vec{E}$ e $\vec{B}$.

$$\vec{E}(\vec{r},t) = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = i \sum_{k,\lambda} \overbrace{k}^{\omega = ck} \left[A_{k\lambda} e^{i(\bar{k}\cdot\bar{r} - \omega_k t)} - A_{-\bar{k},\lambda} e^{-i(\bar{k}\cdot\bar{r} - \omega_k t)} \right] \bar{\varepsilon}_{\bar{k}\lambda}$$

$$\vec{B}(\bar{r},t) = \bar{\nabla}\times\bar{A} = i \sum_{k\lambda} \left[A_{k\lambda} e^{i(\bar{k}\cdot\vec{r} - \omega_k t)} - A_{-\bar{k}\lambda} e^{-i(\bar{k}\cdot\bar{r} - \omega_k t)} \right] \cdot (\vec{k}\times\bar{\varepsilon}_{\bar{k}\lambda})$$

Dove per l'espressione di B abbiamo usato

$$\vec{\nabla}\times(e^{\pm i\bar{k}\cdot\bar{r}}\bar{\varepsilon}_{k\lambda}) = (\vec{\nabla}e^{\pm ikr})\times\bar{\varepsilon}_{k\lambda} =$$

$$= \pm i\, e^{\pm i\bar{k}\cdot\bar{r}} (\vec{k}\times\bar{\varepsilon}_{k\lambda})$$

Siamo ora in grado di trovare l'Hamiltoniana del campo e.m. in termini dei vari modi di cavità. Ricordiamo che

$$H = \frac{1}{8\pi}\int_V (E^2 + B^2)\, d^3r$$

sostituendo

$$H = -\frac{1}{8\pi}\int_V d^3r \sum_{k\lambda}\sum_{k'\lambda'} \left[A_{\bar{k}\lambda} e^{i(\bar{k}\cdot\bar{r} - \omega t)} - A_{-\bar{k}\lambda} e^{-i(\bar{k}\cdot\vec{r} - \omega t)} \right] \left[A_{\bar{k}'\lambda'} e^{i(\bar{k}'\cdot\bar{r} - \omega t)} - A_{-\bar{k}'\lambda'} e^{-i(\bar{k}'\cdot\vec{r} - \omega t)} \right]$$

$$\left[kk'\, \bar{\varepsilon}_{\bar{k}\lambda}\cdot\bar{\varepsilon}_{\bar{k}'\lambda'} + (\bar{k}\times\bar{\varepsilon}_{k\lambda})\cdot(\vec{k}'\times\vec{\varepsilon}_{k'\lambda'}) \right]$$

Notiamo ora che

$$\int_V e^{\pm i(\bar{k} - \bar{k}')\cdot\bar{r}}\, d^3r = V\delta_{\bar{k}\bar{k}'} \qquad \int_V e^{\pm i(\bar{k} + \bar{k}')\cdot\bar{r}}\, d^3r = V\delta_{-\bar{k}\bar{k}'}$$

perchè se $k=k'$ è ovvio.

se $k \neq k'$

$$\int_V e^{i(\bar{k}-\bar{k}')\cdot\bar{r}}\, d^3r \Big/_x = \int_0^L e^{i(k_x-k'_x)x}\, dx$$

$$= \frac{e^{i(k_x-k'_x)x}}{i(k_x-k_{x'})}\Big|_0^L = \frac{e^{i(k_x-k'_x)L}-1}{i(k_x-k_{x'})} = \frac{e^{i(n-n')2\pi}-1}{i(k_x-k_{x'})}$$

$$k = \frac{2\pi n}{L}$$

$$= \frac{1-1}{i(k_x-k_{x'})} = \emptyset$$

l'espressione che rimane è

$$H = \frac{V}{8\pi}\sum_{k\lambda}\sum_{\lambda'}\left[k^2\,\bar{\varepsilon}_{k\lambda}\cdot\bar{\varepsilon}_{k\lambda'} + (\bar{k}\times\bar{\varepsilon}_{k\lambda})\cdot(\vec{k}\times\bar{\varepsilon}_{k\lambda'})\right]$$

$$(A_{k\lambda}A_{-k\lambda'} + A_{-k\lambda}A_{k\lambda'}) +$$

$$-\frac{V}{8\pi}\sum_{k\lambda}\sum_{\lambda'}\left[k^2\,\bar{\varepsilon}_{k\lambda}\cdot\bar{\varepsilon}_{-k\lambda'} + (\bar{k}\times\bar{\varepsilon}_{k\lambda})(\vec{k}\times\vec{\varepsilon}_{-k\lambda'})\right]$$

$$\left(A_{k\lambda}A_{-k\lambda'}\,e^{-2i\omega_k t} + A_{-k\lambda}A_{k\lambda'}\,e^{+2i\omega_k t}\right)$$

dove abbiamo usato che $\omega_{-k} = \omega_k$.

Ora osserviamo che nella I somma entrambi i prodotti scalari diventano $k^2\delta_{\lambda\lambda'}$.

Inoltre $(\bar{k}\times\bar{\varepsilon}_{\bar{k}\lambda})\cdot(-\bar{k}\times\bar{\varepsilon}_{\bar{k}\lambda'}) = -k^2\,\bar{\varepsilon}_{\bar{k}\lambda}\cdot\bar{\varepsilon}_{-\bar{k},\lambda'}$

quindi tutti i termini della seconda somma svaniscono e come ci si aspettava l'Hamiltoniana diventa indipendente dal tempo.

NOTA COORDINATE DI CAMPO CLASSICHE → Dim. l'espressione x H di pag. 25

$$\vec{A}(\vec{r},t) = \sum_{\vec{k}\lambda}\left[A_{\vec{k}\lambda}\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega_k t)} + A_{-\vec{k}\lambda}\, e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega_k t)}\right]\vec{\varepsilon}_{\vec{k}\lambda}$$

$$\vec{E}(\vec{r},t) = -\frac{1}{c}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = i\sum_{\vec{k}\lambda} k\left[A_{k\lambda}\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega_k t)} - A_{-\vec{k}\lambda}\, e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega_k t)}\right]\vec{\varepsilon}_{\vec{k}\lambda}$$

$$\vec{B}(\vec{r},t) = \vec{\nabla}\times\vec{A} = i\sum_{\vec{k}\lambda}\left[A_{k\lambda}\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega_k t)} - A_{-\vec{k}\lambda}\, e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega_k t)}\right](\vec{k}\times\vec{\varepsilon}_{\vec{k}\lambda})$$

$$H = \frac{1}{8\pi}\int_V (E^2+B^2)\, d^3r = -\frac{1}{8\pi}\int_V d^3r \sum_{\vec{k}\lambda}\sum_{\vec{k}'\lambda'}\left\{\left[A_{\vec{k}\lambda}\, e^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega_k t)} - A_{-\vec{k}\lambda}\, e^{-i(\vec{k}\cdot\vec{r}-\omega_k t)}\right]\right.$$

$$\left.\left[A_{\vec{k}'\lambda'}\, e^{i(\vec{k}'\cdot\vec{r}-\omega_{k'} t)} - A_{-\vec{k}'\lambda'}\, e^{-i(\vec{k}'\cdot\vec{r}-\omega_{k'} t)}\right]\left[kk'\vec{\varepsilon}_{\vec{k}\lambda}\cdot\vec{\varepsilon}_{\vec{k}'\lambda'} + (\vec{k}\times\vec{\varepsilon}_{\vec{k}\lambda})\cdot(\vec{k}'\times\vec{\varepsilon}_{\vec{k}'\lambda'})\right]\right\}$$

$$= -\frac{1}{8\pi}\int_V d^3r \sum_{\vec{k}\lambda}\sum_{\vec{k}'\lambda'}\left\{A_{\vec{k}\lambda}A_{\vec{k}'\lambda'}\, e^{i[(\vec{k}+\vec{k}')\cdot r-(\omega_k+\omega_{k'})t]} + \right.$$

$$- A_{-\vec{k}\lambda}A_{k'\lambda'}\, e^{-i[(\vec{k}-\vec{k}')\cdot\vec{r}-(\omega_k-\omega_{k'})t]} - A_{\vec{k}\lambda}A_{-k'\lambda'}\, e^{i[(\vec{k}-\vec{k}')\cdot\vec{r}-(\omega_k-\omega_{k'})t]} +$$

$$\left. + A_{-\vec{k}\lambda}A_{-k'\lambda'}\, e^{-i[(\vec{k}+\vec{k}')\cdot r-(\omega_k+\omega_{k'})t]}\right\}\left[kk'\,\vec{\varepsilon}_{k\lambda}\cdot\vec{\varepsilon}_{k'\lambda'} + (\vec{k}\times\vec{\varepsilon}_{k\lambda})\cdot(\vec{k}'\times\vec{\varepsilon}_{k'\lambda'})\right]$$

$$\cancel{-\frac{V}{8\pi}\sum_{k\lambda}\sum_{\lambda'}\left[A_{k\lambda}A_{-k\lambda'}\, e^{-2i\omega_k t}\right]}$$

ora tenendo conto dei valori degli integrali separiamo ~~quello~~ i pezzi che hanno $k=k'$ da quelli che hanno $k=-k'$

$$= -\frac{V}{8\pi}\sum_{k\lambda}\sum_{\lambda'}\left[A_{k\lambda}A_{-k\lambda'}\, e^{-2i\omega_k t} + A_{-k\lambda}A_{k\lambda'}\, e^{2i\omega_k t}\right]$$

$$\left[k^2\,\vec{\varepsilon}_{k\lambda}\cdot\varepsilon_{-k\lambda'} + (\vec{k}\times\vec{\varepsilon}_{k\lambda})\cdot(-\vec{k}\times\vec{\varepsilon}_{-k\lambda})\right] + \frac{V}{8\pi}\sum_{k\lambda}\sum_{\lambda'}$$

$$\left[A_{-\vec{k}\lambda}A_{\vec{k}\lambda'} + A_{\vec{k}\lambda}A_{-k\lambda'}\right]\left[k^2(\vec{\varepsilon}_{k\lambda}\cdot\vec{\varepsilon}_{k\lambda'}) + (\vec{k}\times\vec{\varepsilon}_{k\lambda})\cdot(\vec{k}\times\varepsilon_{k\lambda'})\right]$$

NOTA

$$\left(\bar{k}\times\bar{\varepsilon}_{\bar{k}\lambda}\right)\cdot\left(-\bar{k}\times\bar{\varepsilon}_{-\bar{k}\lambda'}\right) = -k^2\,\bar{\varepsilon}_{\bar{k}\lambda}\cdot\bar{\varepsilon}_{-k\lambda'}$$

$$\left(\varepsilon_{ijk}\;k_j\left(\varepsilon_{\bar{k}\lambda}\right)_k\right)_i\left(\varepsilon_{ijk}\left(-k_j\right)\left(\varepsilon_{-k\lambda'}\right)_k\right)_i =$$

$$= \underset{\substack{\| \\ 1}}{\left(\varepsilon_{ijk}\right)^2}\left(-k_j^{\,2}\right)\left(\varepsilon_{k\lambda}\right)_k\cdot\left(\varepsilon_{-k\lambda'}\right)_k \Rightarrow -k^2\,\bar{\varepsilon}_{k\lambda}\cdot\bar{\varepsilon}_{-k\lambda'}$$

l'Hamiltoniano che risulta ha una forma particolarmente semplice

$$\boxed{H = \frac{V}{8\pi c^2} \sum_{\vec{k}\lambda} \omega_k^2 \left(A_{-\vec{k},\lambda} A_{\vec{k}\lambda} + A_{\vec{k}\lambda} A_{-\vec{k}\lambda} \right)} \tag{28}$$

ciascun modo di vibrazione del campo contribuisce all'Hamiltoniana con un termine che è identico a quello di un oscillatore armonico.

DIMOSTRAZIONE –

RICORDIAMO CHE l'Hamiltoniano dell'oscillatore armonico è (1 DIM)

$$H_{OA} = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2$$

Definiamo

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{x} + i\hat{p}) \qquad \hat{x} = \frac{1}{\sqrt{2}} (a + a^+)$$

$$a^+ = \frac{1}{\sqrt{2}} (\hat{x} - i\hat{p}) \qquad \hat{p} = \frac{1}{\sqrt{2}\, i} (a - a^+)$$

avremo che

$$a a^+ + a^+ a = \frac{1}{2} (\hat{p}^2 + \hat{x}^2)$$

$$\hat{H} = \frac{H}{\left(\frac{V}{4\pi c^2 \omega^2}\right)} = (a a^+ + a^+ a) = \frac{1}{2} (\hat{p}^2 + \hat{x}^2)$$

dove H è l'Hamiltoniano che abbiamo ottenuto per il campo di radiazione puro una ~~de~~ solo per un modo

con

$$\hat{p} = \sqrt{\frac{4\pi c^2}{V m\omega}}\, p \qquad \hat{x} = \sqrt{\frac{4\pi c^2}{V}}\, x \sqrt{m}$$

$$\hat{H} = \frac{4\pi c^2}{V} \left(\frac{p^2}{2m\omega^2} + \frac{m}{2} x^2 \right)$$

$$\Rightarrow H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 x^2 \qquad \text{C.V.D.}$$

DOVE IN TERMINI DI ~~p~~ ed ~~p~~ x

$$a = \sqrt{\frac{4\pi}{2V} c^2 m} \left(x + i \frac{p}{m\omega} \right)$$

$$a^+ = \sqrt{\frac{4\pi}{2V} c^2 m} \left(x - i \frac{p}{m\omega} \right)$$