Soluzioni della prova scritta di Fisica Generale 1

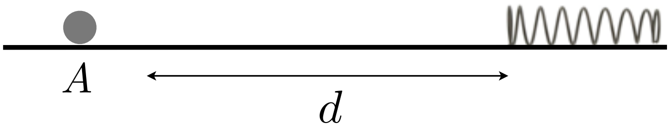
11 Settembre 2013

Tempo a disposizione 3 ore

ESERCIZIO 1

Un punto materiale di massa $m = 1\,\mathrm{kg}$ viaggia su un piano orizzontale scabro con coefficiente di attrito $\mu = 0.5$. Ad un certo istante esso passa per il punto A con una velocità v_A. Dopo aver percorso un tratto di lunghezza $d = 3\,\mathrm{m}$ incontra una molla di costante elastica $10\,\mathrm{N/m}$ inizialmente a riposo. Trovare il minimo valore di v_A tale che il corpo arrivi a toccare la molla. Nel caso in cui $v_A = 6.5\,\mathrm{m/s}$ trovare:

- La velocità nel punto di impatto con la molla e il tempo t necessario per raggiungerlo
- La massima compressione della molla
- Il valore minimo del coefficiente di attrito statico μ_S tale che il punto non venga respinto dalla molla



SOLUZIONE

Il minimo valore di v_A è quello per cui il punto materiale arriva alla molla con velocità nulla. L'energia cinetica viene dissipata per attrito:

$$\frac{1}{2}mv_A^2 = \mu mgd \qquad \Rightarrow \qquad v_A = \sqrt{2\mu gd} \approx 5.4\,\mathrm{m/s}.$$

Nel caso in cui v_A è noto e v_B è la velocità di impatto:

$$\frac{1}{2}mv_A^2 = \frac{1}{2}mv_B^2 + \mu mgd \qquad \Rightarrow \qquad v_B = \sqrt{v_A^2 - 2\mu gd} \approx 3.6\,\mathrm{m/s}$$

Il moto è uniformemente decelerato con accelerazione $a = -\mu g$ quindi:

$$v_B = v_A - \mu g t_B \qquad \Rightarrow \qquad t_B = \frac{v_A - v_B}{\mu g} = 0.6\,\mathrm{s}$$

Quando la molla è totalmente compressa, una parte dell'energia cinetica viene convertita in energia potenziale della molla. L'energia restante è dissipata per attrito.

$$\frac{1}{2}mv_B^2 = \frac{1}{2}kL^2 + \mu mgL \qquad \Rightarrow \qquad kL^2 + 2\mu mgL - mv_B^2 = 0$$

Considerando solo la soluzione positiva:

$$L = \frac{1}{k}\left[\sqrt{(\mu mg)^2 + kmv_B^2} - \mu mg\right] = 0.75\,\mathrm{m}$$

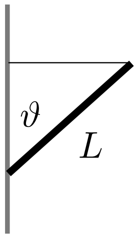
Il corpo rimane in equilibrio solo se la forza esercitata dalla molla è bilanciata dalla forza di attrito.:

$$kL \leqslant \mu_S mg \qquad \Rightarrow \qquad \mu_S \geqslant \frac{kL}{mg} \approx 0.76$$

ESERCIZIO 2

Una sbarretta omogenea di massa $M = 3\,\mathrm{kg}$ e lunghezza $L = 1\,\mathrm{m}$ può ruotare senza attrito attorno a un perno passante per uno dei suoi estremi e fissato ad una parete verticale. La sbarretta è mantenuta in equilibrio da un filo orizzontale (vedi figura).

- Calcolare la tensione del filo
- Se il filo viene tagliato calcolare l'energia cinetica della sbarretta quando raggiunge la posizione verticale
- Calcolare la velocità del centro di massa e dell'estremo libero della sbarretta nel momento in cui raggiunge la posizione verticale.



SOLUZIONE
Il sistema è in equilibrio e il momento delle forze esterne è nullo:

$$TL\cos\vartheta - \frac{L}{2}Mg\sin\vartheta = 0 \qquad \Rightarrow \qquad T = \frac{Mg}{2}\tan\vartheta$$

L'energia cinetica della sbarretta si ottiene dalla conservazione dell'energia meccanica:

$$mg\frac{L}{2}\cos\vartheta = E_c - mg\frac{L}{2} \qquad \Rightarrow \qquad E_c = mg\frac{L}{2}(1+\cos\vartheta)$$

La relazione che lega energia cinetica alla velocità angolare è $E_C = \frac{1}{2}I\omega^2$. Il momento di inerzia è pari a $I = \frac{3}{2}mL^2$. La velocità angolare è quindi:

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{L}(1+\cos\vartheta)}$$

Quindi $v = \omega L$, la velocità del centro di massa è invece $v_{CM} = \omega L/2$

ESERCIZIO 3
Tre moli di gas perfetto biatomico si trovano inizialmente nello stato $A(P_A, V_A)$ ed eseguono il seguente ciclo:

- Isocora irreversibile dallo stato A allo stato B fino a raddoppiare la pressione, scambiando calore con una sorgente alla temperatura T_B
- Isobara irreversibile dallo stato B allo stato C fino a quadruplicare il volume, scambiando calore con una sorgente alla temperatura T_C.
- Una trasformazione irreversibile, lineare nel piano PV, che riporta il gas nello stato A.

Calcolare il rendimento del ciclo e la variazione di entropia dell'universo in un ciclo.
(Valori numerici: $P_A = 5 \cdot 10^5\,Pa,\ V_A = 0.004\,m^3$.)

SOLUZIONE
I parametri che definiscono gli stati A, B, C sono:

$$T_A = \frac{P_A V_A}{nR} \approx 80\,\mathrm{K}$$

$$V_B = V_A; \quad P_B = 2P_A; \quad T_B = \frac{P_B V_B}{nR} = 2T_A \approx 160\,\mathrm{K}$$

$$V_C = 4V_A; \quad P_C = P_B = 2P_A; \quad T_C = \frac{P_C V_C}{nR} = 8T_A = 640\,\mathrm{K}$$

Troviamo quindi:

$$L_{AB} = 0; \quad Q_{AB} = \Delta U_{AB} = nc_v\Delta T = \frac{5}{2}nR\frac{P_A V_A}{nR} = \frac{5}{2}P_A V_A$$

$$L_{BC} = P_B\Delta V = P_B(V_C - V_B) = 6P_A V_A; \quad Q_{BC} = nc_p\Delta T = n\frac{7}{2}R(T_C - T_B) = 21P_A V_A$$

$$L_{CA} = \frac{1}{2}(P_C + P_A)(V_A - V_C) = -\frac{9}{2}P_A V_A; \quad Q_{CA} = \Delta U_{CA} + L_{CA} = n\frac{5}{2}R(T_A - T_C) - \frac{9}{2}P_A V_A = -13P_A V_A$$

Il rendimento vale quindi

$$\eta = \frac{L}{Q_{ASS}} = \frac{6P_A V_A - 9/2P_A V_A}{5/2P_A V_A + 21P_A V_A} = \frac{3/2}{47/2} = \frac{3}{47} \approx 0.064$$

La variazione di entropia dell'universo non è nulla poiché le trasformazioni AB e BC sono irreversibili. In particolare:

$$\Delta S = \Delta S_{gas} + \Delta S_{T_B} + \Delta S_{T_C} = c_v \ln\frac{V_C}{V_A} + R\ln\frac{V_C}{V_A} - \frac{5/2P_A V_A}{T_B} - \frac{21P_A V_A}{T_C}$$