

# FS110 Fisica 1 - CdL in Matematica

## Tutorato 9

Docente: Paola Gallo;  
Tutor: Matteo Romoli e Davide Zaccaria.

10 Maggio 2023

### Esercizio 1

Su un piano orizzontale è posata una massa  $m = 10$  kg. Essa viene messa in movimento tramite un filo che si avvolge su una puleggia di raggio  $r = 20$  cm. Questa è messa in rotazione dalla discesa di una massa  $M = 4$  kg che scende sotto la sola azione della forza peso. La massa  $M$  è collegata a una puleggia di raggio  $R = 50$  cm, coassiale e rigidamente fissata alla puleggia precedente. Il momento di inerzia delle due pulegge rispetto al comune asse di rotazione è  $I = 6$  kg m<sup>2</sup>. Calcolare:

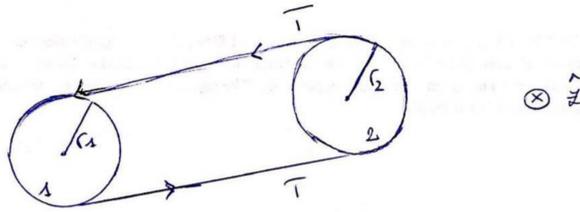
- la velocità  $v$  di  $M$  dopo che è scesa di  $h = 1$  m;
- le tensioni dei due fili durante il movimento;
- il valore di  $v$  se tra la massa  $m$  e il piano ci fosse un coefficiente di attrito  $\mu = 0.25$



### Esercizio 2

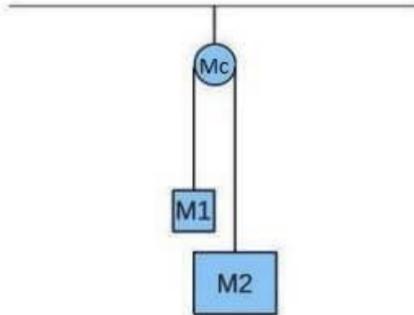
Due dischi con masse  $m_1 = 5$  kg e  $m_2 = 20$  kg e raggi  $r_1 = 10$  cm e  $r_2 = 20$  cm sono connessi come in figura (guardare la seconda pagina) da una cinghia indeformabile. All'asse del primo disco è connesso un motore che può fornire un momento costante  $M_1 = 8$  N·m, mentre sull'asse del secondo disco agisce un momento frenante costante  $M_2 = 7$  N·m. Al tempo  $t = 0$  il motore comincia ad agire facendo ruotare il primo disco. Calcolare:

- la velocità angolare del secondo disco al tempo  $t = 5$  s;
- quanto lavoro è stato fornito dal motore al tempo  $t = 5$  s;



### Esercizio 3

Due masse  $m_1 = 8 \text{ kg}$  e  $m_2 = 10 \text{ kg}$  sono appese mediante a una carrucola tramite una fune ideale. La carrucola ha una massa  $m_c = 3 \text{ kg}$  e un raggio  $r = 15 \text{ cm}$ . Trovare l'accelerazione del centro di massa e le tensioni delle funi.



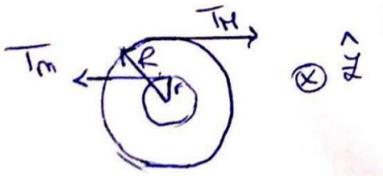
### Soluzione 1

Scriviamo il secondo principio della dinamica per le masse  $m$  e  $M$ :

$$\begin{cases} ma_m = T_m = mr\alpha \\ Ma_M = Mg - T_M = MR\alpha \end{cases}$$

Dove  $a_m$  e  $a_M$  sono le accelerazioni lineari relative alle due masse,  $r$  e  $R$  sono i raggi delle carrucole collegate rispettivamente alle masse  $m$  e  $M$ , mentre  $T_m$  e  $T_M$  sono le tensioni rispettivamente relative alle masse  $m$  e  $M$ . Infine,  $\alpha$  è l'accelerazione angolare, che è uguale per entrambe le carrucole perché queste sono fissate rigidamente l'una all'altra.

Ora scriviamo l'equazione dei momenti per il sistema della doppia carrucola, considerando l'asse  $\hat{z}$  positivo come la direzione perpendicolare ed entrante nel foglio:



$$RT_M - rT_m = I\alpha$$

Dalle prime due equazioni ricaviamo le incognite  $T_m$  e  $T_M$  e le sostituiamo nella terza per ricavare  $\alpha$ :

$$\begin{aligned} T_m &= mr\alpha \\ T_M &= Mg - MR\alpha \end{aligned} \Rightarrow RMg - R^2M\alpha - r^2m\alpha = I\alpha \Rightarrow \alpha(I + mr^2 + MR^2) = RMg$$
$$\Rightarrow \alpha = \frac{RMg}{(I + mr^2 + MR^2)} \cong 2.65 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$$

Per calcolare la velocità ricaviamo prima il tempo, considerando che ci troviamo di fronte a un moto uniformemente accelerato:

$$y(t) = \frac{1}{2}at^2 \Rightarrow h = \frac{1}{2}a_M t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{\alpha R}} \cong 1.23 \text{ s}$$

Con  $a_M = \alpha R$ . Quindi, per la velocità abbiamo:

$$v(t) = a_M t = \alpha R t \cong 1.63 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Per quanto riguarda le tensioni, invece, si trova:

$$\begin{aligned} T_m &= mr\alpha \cong 5.3 \text{ N} \\ T_M &= Mg - MR\alpha \cong 33.9 \text{ N} \end{aligned}$$

Ora vediamo il caso in cui la massa  $m$  sia soggetta ad una forza d'attrito. In questo caso, le equazioni del moto precedenti, le due equazioni della forze e quella relativa ai momenti, cambiano in questo modo:

$$\begin{cases} T'_m - \mu mg = mr\alpha' \\ Mg - T'_M = MR\alpha' \\ RT'_M - rT'_m = I\alpha' \end{cases}$$

Abbiamo aggiunto gli apici alle tensioni e all'accelerazione angolare per distinguerli dal caso precedente. Ora risolviamo seguendo lo stesso procedimento adottato nel caso precedente:

$$\begin{aligned}
T'_m &= mr\alpha' + \mu mg \\
T'_M &= Mg - MR\alpha' \\
\Rightarrow RMg - r\mu mg - R^2M\alpha' - r^2m\alpha' &= I\alpha' \\
\Rightarrow \alpha'(I + mr^2 + MR^2) &= RMg - r\mu mg \\
\Rightarrow \alpha &= \frac{RMg - r\mu mg}{(I + mr^2 + MR^2)} \cong 1.99 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2} < \alpha
\end{aligned}$$

E per il tempo:

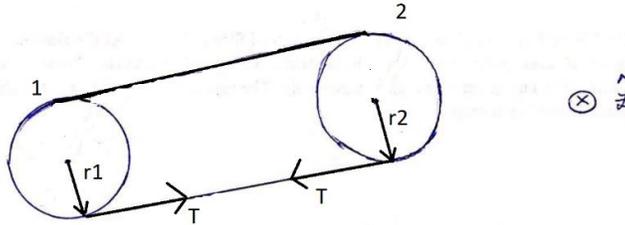
$$y(t) = \frac{1}{2}a't'^2 \Rightarrow h = \frac{1}{2}a'_Mt'^2 \Rightarrow t' = \sqrt{\frac{2h}{\alpha'R}} \cong 1.42 \text{ s}$$

Con  $a'_M = \alpha'R$ . Quindi, per la velocità abbiamo:

$$v'(t) = a'_Mt' = \alpha'Rt' \cong 1.41 \frac{\text{m}}{\text{s}} \blacksquare$$

## Soluzione 2

La tensione della cinghia è la stessa in modulo. I vettori della tensione sono diretti lungo la cinghia e con versi opposti, applicati ciascuno in corrispondenza del punto in cui la cinghia è tangente ai dischi.



Consideriamo che i due dischi ruotino in senso orario. Il momento totale di ogni disco sarà positivo e diretto lungo z con verso entrante nel foglio. Il disco 1 'tira' la cinghia, per cui la tensione su questo disco sarà diretta lungo la cinghia e verso il disco due. Tuttavia, anche il disco 2, con la sua azione frenante, 'tira' la cinghia e la tensione sarà diretta lungo la cinghia verso il disco 1 (in generale, la tensione si oppone sempre alla forza che la tira la corda. Si pensi, ad esempio, a una massa appesa a un filo).

Scriviamo ora le equazioni dei momenti relative ai due dischi, ricordando che la direzione delle z positive è quella entrante nel foglio:

$$\begin{cases}
1: & M_1 - Tr_1 = I_1\alpha_1 = \frac{1}{2}m_1r_1^2\alpha_1 \\
2: & -M_2 + Tr_2 = I_2\alpha_2 = \frac{1}{2}m_2r_2^2\alpha_2
\end{cases}$$

Ricaviamo T dalla seconda equazione e sostituiamo la sua espressione nella prima equazione:

$$\begin{aligned}
T &= \frac{1}{2}m_2r_2\alpha_2 + \frac{M_2}{r_2} \\
M_1 - \frac{1}{2}m_2r_1r_2\alpha_2 - \frac{M_2r_1}{r_2} &= \frac{1}{2}m_1r_1^2\alpha_1 \quad (1)
\end{aligned}$$

Ora consideriamo un punto sulla cinghia che cinge il disco 1. In un certo intervallino di tempo esso avrà compiuto un archetto di circonferenza (dato dall'apertura angolare per il raggio). Un punto qualsiasi sul disco 2 avrà compiuto un arco di uguale misura. Pertanto, possiamo scrivere:

$$r_1 d\theta_1 = r_2 d\theta_2$$

Se dividiamo per l'intervallo di tempo  $dt$  otteniamo:

$$r_1 \frac{d\theta_1}{dt} = r_2 \frac{d\theta_2}{dt} \Rightarrow r_1 \omega_1(t) = r_2 \omega_2(t)$$

E derivando di nuovo rispetto al tempo otteniamo:

$$r_1 \frac{d\omega_1}{dt} = r_2 \frac{d\omega_2}{dt} \Rightarrow r_1 \alpha_1 = r_2 \alpha_2 \Rightarrow a_1 = a_2$$

Quindi possiamo dire che l'accelerazione lineare dei dischi è la stessa. Usiamo questo risultato, ovvero  $r_1 \alpha_1 = r_2 \alpha_2$  nell'equazione (1). Otteniamo:

$$M_1 - \frac{1}{2} m_2 r_1^2 \alpha_1 - \frac{M_2 r_1}{r_2} = \frac{1}{2} m_1 r_1^2 \alpha_1 \Rightarrow \alpha_1 \frac{1}{2} r_1^2 (m_1 + m_2) = M_1 - \frac{M_2 r_1}{r_2} \Rightarrow$$

$$\alpha_1 = \frac{M_1 - \frac{M_2 r_1}{r_2}}{\frac{1}{2} r_1^2 (m_1 + m_2)} \cong 36 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$$

E quindi possiamo ricavare  $\alpha_2$ :

$$\alpha_2 = \frac{\alpha_1 r_1}{r_2} \cong 18 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$$

Quindi, la velocità angolare del disco dopo 5 s è:

$$\omega_2(t = 5 \text{ s}) = \alpha_2 \cdot t \cong 90 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Il lavoro compiuto dal motore 1 si calcola attraverso l'integrale del momento per lo spostamento angolare compiuto, ovvero:

$$L = \int_{\theta_0}^{\theta_f} M_1 d\theta = M_1 \theta(t - t_0) = M_1 \theta(5 \text{ s})$$

Il moto è rotatorio uniformemente accelerato, quindi:

$$\theta = \frac{1}{2} \alpha t^2$$

E alla fine troviamo:

$$L = M_1 \frac{1}{2} \alpha_1 t^2 \cong 3600 \text{ J} \blacksquare$$

### Soluzione 3

Se la carrucola ha una massa non trascurabile le tensioni della fune vanno distinte, perché non sono più uguali. Queste tensioni esercitano momenti torcenti sulla carrucola che vanno tenuti in considerazione. Se la massa 2 è quella che scende e la massa 1 è quella che sale, abbiamo le seguenti equazioni del moto:

$$\begin{cases} m_2 g - T_2 = m_2 a \\ T_1 - m_1 g = m_1 a \end{cases}$$

La tensione 2 tende a far girare la carrucola in senso orario, la tensione 1 in senso antiorario. La carrucola pertanto è soggetta a due momenti contrapposti che hanno però lo stesso braccio, in quanto le tensioni si applicano entrambe al bordo della carrucola. I due momenti vanno sottratti e il loro risultato sarà dato dal momento d'inerzia per l'accelerazione angolare:

$$T_2 r - T_1 r = I \alpha$$

Se la carrucola è un disco, allora il suo momento di inerzia relativo all'asse passante per il centro è:

$$I = \frac{1}{2} m_c r^2 = 0.034 \text{ kg m}^2$$

L'accelerazione angolare, in funzione di quella tangenziale, è  $\alpha = \frac{a}{r}$  e quindi l'equazione dei momenti diventa:

$$T_2 r - T_1 r = \frac{1}{2} m_c r^2 \frac{a}{r} \Rightarrow T_2 - T_1 = \frac{1}{2} m_c a$$

Con le prime due equazioni si hanno 3 equazioni in 3 incognite. Le soluzioni sono:

$$\begin{cases} a = g \frac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1 + \frac{m_c}{2}} = 1 \text{ m/s} \\ T_1 = m_1 g \frac{2m_2 + \frac{m_c}{2}}{m_2 + m_1 + \frac{m_c}{2}} = 86 \text{ N} \\ T_2 = m_2 g \frac{2m_1 + \frac{m_c}{2}}{m_2 + m_1 + \frac{m_c}{2}} = 88 \text{ N} \end{cases}$$

