FS110 Fisica 1 - CdL in Matematica

Tutorato 8

Docente: Paola Gallo;
Tutor: Matteo Romoli e Davide Zaccaria.

3 Maggio 2023

Esercizio 1

Un punto materiale di massa $m = 0,2$ kg e velocità $v = 3$ m/s si muove su un piano orizzontale liscio e colpisce una sbarra a distanza $h = 0,1$ m dal centro. La massa della sbarra è $m' = m$ e la sua lunghezza è $l = 0,4$ m. L'urto è anelastico. Trovare la perdita di energia dell'urto.

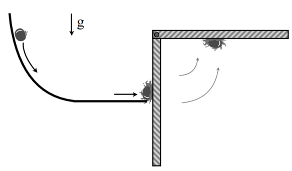
Esercizio 2

Si consideri una particella di massa M legata ad una corda di lunghezza r_0. La particella si muove di moto circolare con velocità v_0. Quanto lavoro è necessario per accorciare la corda ad una lunghezza r (con $r < r_0$) ?

Esercizio 3

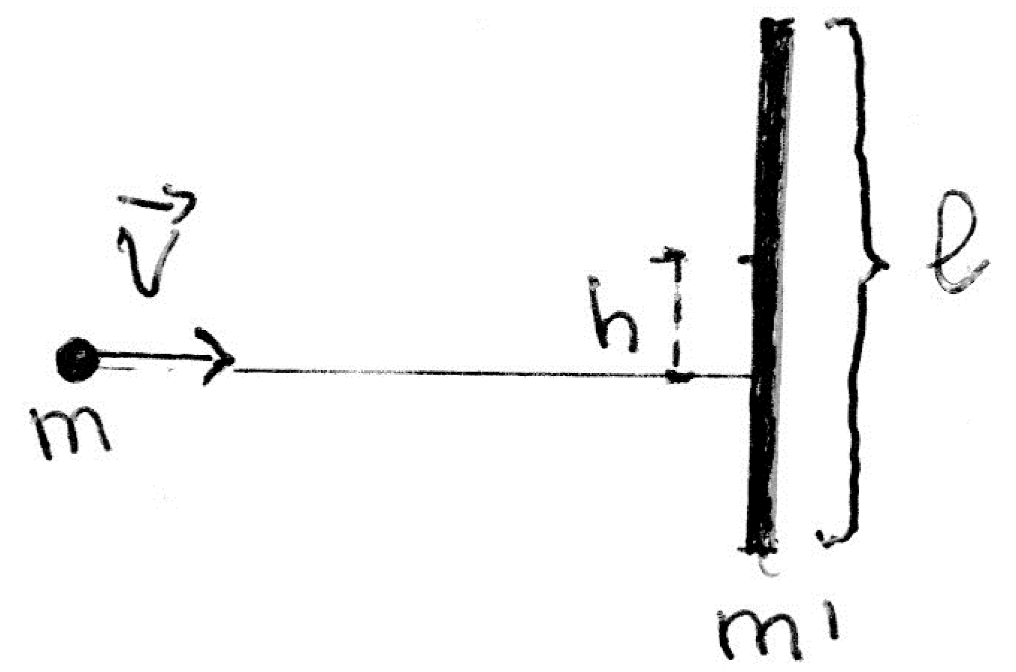
Un pomodoro di massa $m = 54$ g, dopo essere scivolato lungo una guida curvilinea, urta orizzontalmente una sbarretta rigida di massa $M = 120$ g e lunghezza $L = 26$ cm. Il pomodoro parte con velocità v_0 da un'altezza $h = 80$ cm rispetto alla base della guida, e urta la sbarretta, in modo completamente anelastico, a metà della sua lunghezza. Sapendo che dopo l'urto la sbarretta raggiunge un angolo massimo di 90°, si determini:

- Il momento di inerzia del sistema pomodoro più sbarretta;
- La velocità angolare della sbarretta subito dopo l'urto;
- La velocità iniziale che possedeva il pomodoro.



CONSERVAZIONE DEL MOMENTO ANGOLARE - 29/04/2021 (1)
E FORZE CENTRALI

[1] UN PUNTO MATERIALE DI MASSA $m = 0{,}2$ Kg E VELOCITÀ $V = 3$ m/s SI MUOVE SU UN PIANO ORIZZONTALE LISCIO E COLPISCE UNA SBARRA AD UNA DISTANZA $h = 0{,}1$ m DAL CENTRO. LA MASSA DELLA SBARRA È $m' = m$ E LA SUA LUNGHEZZA È $l = 0{,}4$ m. L'URTO È ANELASTICO. TROVARE LA PERDITA DI ENERGIA NELL'URTO.



URTO ANELASTICO = NON SI CONSERVA L'ENERGIA CINETICA
NON CI SONO FORZE ESTERNE = SI CONSERVANO SIA L'IMPULSO CHE IL MOMENTO ANGOLARE

- Conservazione dell'impulso:

$$\vec{P}_i = \vec{P}_f \Rightarrow mV = m_{TOT} V_{CM} \Rightarrow mV = 2mV_{CM} \Rightarrow V_{CM} = \frac{V}{2} = 1{,}5 \text{ m/s}$$

- Conservazione del momento angolare:

Calcoliamo i momenti rispetto al CdM del sistema dopo l'urto, che risulta:

$$r_{CM} = \frac{\sum_i r_i m_i}{\sum_i m_i} = \frac{mh + m' \cdot 0}{m + m'} = \frac{mh}{2m} = \frac{h}{2} = 0{,}05 \text{ m}$$

Posizione del CdM (rispetto al centro della sbarra)

$$\vec{L}_i = \vec{L}_f \qquad \vec{L}_i = \vec{r}_{CM} \times \vec{P}_i = \frac{h}{2} \cdot mV$$

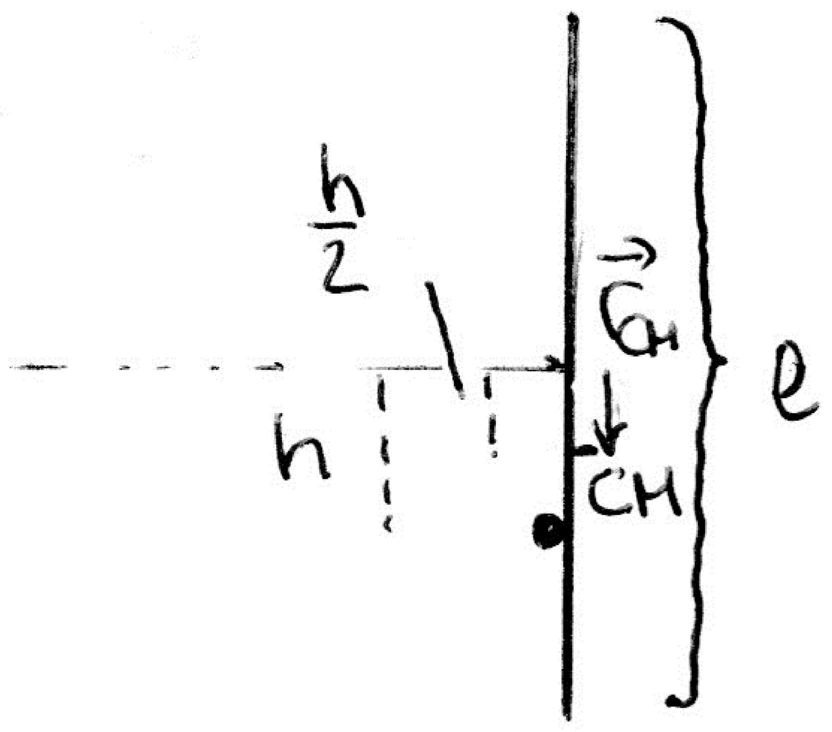
$$\vec{L}_f = I\omega$$

I è valutato rispetto al CdM

In questo caso applichiamo il teorema di Huygens-Steiner:

$I = I_{CM} + Md^2$ Il momento di inerzia di un corpo rispetto a un qualunque asse di rotazione è uguale alla somma del momento di inerzia rispetto all'asse passante per il CdM e parallelo a quello dato e del prodotto della massa per il quadrato della distanza fra gli assi.

Nel nostro caso abbiamo:



$$I = \underbrace{I_{sbarra}}_{\text{momento di inerzia della sbarretta relativo al suo CdM}} + \underbrace{r_{CM}^2 \cdot m}_{\text{contributo della pallina rimasta attaccata}}$$

Quindi col teorema di H-S troviamo:

$I_{sbarra} = I_{asse} + m'd^2$ con $d = \frac{h}{2}$

$\Rightarrow I_{sbarra} = \frac{1}{12}m'l^2 + m'\frac{h^2}{4}$ ma $l = 4h$, $m' = m$

Quindi $I = \frac{1}{12}m'l^2 + m'\frac{h^2}{4} + m\frac{h^2}{4} = \frac{1}{12}m\,16h^2 + \frac{mh^2}{4} + \frac{mh^2}{4} =$

$= \frac{4}{3}mh^2 + \frac{1}{4}mh^2 + \frac{1}{4}mh^2 = mh^2\left(\frac{4}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) =$

$= mh^2\left(\frac{16+3+3}{12}\right) = mh^2\,\frac{22}{12} = 3,6 \cdot 10^{-3}\ Kg \cdot m^2$

Per cui $mv\frac{h}{2} = I\omega \Rightarrow \omega = \frac{mvh}{2I} = 8,3$ rad/s

Possiamo ora usare il 2° teorema di König:

L'energia cinetica totale di un sistema è data dalla somma dell'energia cinetica del centro di massa e l'energia cinetica relativa del sistema rispetto al CdM:

$K_i = \frac{1}{2}mV^2$

$K_f = \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}m_{TOT}V_{CM}^2$ $\Rightarrow \Delta K = K_f - K_i$

$= \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}m_{TOT}V_{CM}^2 - \frac{1}{2}mV^2 =$

$= \frac{1}{2}I\omega^2 + mV_{CM}^2 - \frac{1}{2}mV^2 = 0{,}4\ J$ ■

---

(2) Abbiamo una particella di massa M legata ad una corda di lunghezza r_0. La particella si muove di moto circolare con velocità v_0. Quanto lavoro è necessario per accorciare la corda ad una lunghezza r? $(r < r_0)$

La forza applicata è centrale, pertanto ha momento nullo. Quindi, il momento angolare si conserva, cioè:

$$M v_0 r_0 = M v r$$

la velocità v raggiunta sarà:

$$v = \frac{v_0 r_0}{r}$$

Avremo quindi un'energia cinetica iniziale:

$$K_0 = \frac{1}{2}Mv_0^2$$

e quella finale è: $K = \frac{1}{2}Mv^2 = \frac{1}{2}Mv_0^2\frac{r_0^2}{r^2} = K_0\frac{r_0^2}{r^2}$

quindi, il lavoro necessario per accorciare la corda vale:

$$L = K - K_0 = K_0\frac{r_0}{r^2} - K_0 = K_0\left(\frac{r_0^2}{r^2} - 1\right) > 0$$

quindi occorre fare lavoro per accorciare la corda da r_0 a r.

SOLUZIONE ESERCIZIO 2

Il momento di inerzia di un'asta di lenghezza L e massa M, che ruota intorno ad un suo estremo vale:

$$I = \frac{1}{3} M L^2 \,. \tag{13}$$

Il momento di inerzia del sistema asta più pomodoro vale quindi:

$$I_{TOT} = I + m \frac{L}{4}^2 = \left(\frac{M}{3} + \frac{m}{4} \right) L^2 = 0.0036\,\mathrm{kgm}^2 \,. \tag{14}$$

Dopo l'urto l'energia meccanica del sistema si conserva. Inizialmente avremo solo energia cinetica di rotazione, alla fine solo energia potenziale gravitazionale. Visto che l'asta raggiunge i 90 gradi, il centro di massa dell'asta e il pomodoro si trovano alla stessa quota $L/2$. Avremo quindi

$$\frac{1}{2} I_{TOT} {\omega_0}^2 = (m + M)\, g \frac{L}{2} \,. \tag{15}$$

Sostituendo I_{TOT} otteniamo

$${\omega_0}^2 = \frac{(m + M)\, gL}{I + m \frac{L}{4}^2} \,, \tag{16}$$

ossia

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{12\,(m + M)\, g}{(4M + 3m)\, L}} = 11.1\,\mathrm{rad/s} \,. \tag{17}$$

Durante l'urto anelastico invece la sola cosa che si conserva è il momento angolare rispetto al perno. In formule

$$mv \frac{L}{2} = I_{TOT} \omega_0 \tag{18}$$

il che ci dice che la velocità del pomodoro, un istante prima dell'urto, deve valere

$$v = \left(\frac{2}{3} \frac{M}{m} + \frac{1}{2} \right) L \omega_0 \,. \tag{19}$$

Sostituendo nell'espressione sopra ω_0, si ottiene

$$v = \frac{\sqrt{12\,(m + M)\,(4M + 3m)\, gL}}{6m} = 5.7\,\mathrm{m/s} \,. \tag{20}$$

Infine, usiamo il fatto che l'energia meccanica si conserva anche tra l'istante iniziale e l'istante subito prima dell'urto. E che pertanto varrà la relazione

$$\frac{1}{2} m {v_0}^2 + mgh = \frac{1}{2} m v^2 \,. \tag{21}$$

In conclusione quindi, la velocità iniziale che possedeva il pomodoro, tale da far salire l'asta fino ad un angolo di 90 gradi, vale

$$v_0 = \sqrt{v^2 - 2gh} = \sqrt{\frac{12\,(m + M)\,(4M + 3m)\, gL - 72 m^2 gh}{36 m^2}} = 4.1\,\mathrm{m/s} \,. \tag{22}$$