FS110 Fisica 1 - CdL in Matematica

Tutorato 7

Docente: Paola Gallo;
Tutor: Matteo Romoli e Davide Zaccaria.

26 Aprile 2023

Esercizio 1

Un proiettile di massa $m = 10$ g è dotato di velocità iniziale $v_1 = 60\frac{m}{s}$. Esso colpisce un sacchetto di sabbia di massa $M = 2$ kg inizialmente fermo, e si conficca in esso.

Quanta energia si dissipa nell'urto?

Esercizio 2

Due sfere di avorio P_1 e P_2 di masse rispettivamente $m_1 = m$ e $m_2 = 2m$ sono appese ciascuna a un filo di lunghezza l in modo da costituire due pendoli semplici ideali contigui.

Lasciando la sfera P_2 ferma nella posizione iniziale ($\theta_{i,2} = 0;\ v_{i,2} = 0$), la sfera P_1 viene portata a formare una angolo $\theta_{i,1} = 45°$ con la verticale e poi lasciata andare da ferma.

Quali angoli $\theta_{f,1}$ e $\theta_{f,2}$ raggiungono le due sfere dopo l'urto che è supposto elastico?

Esercizio 3

Con riferimento alla figura (a), si considerino i due urti elastici consecutivi (ed unidimensionali) tra tre punti materiali di masse $m_0 = m,\ m_1 = \frac{m}{2}$, ed $m_2 = \frac{m}{4}$. I punti materiali di massa m_1 ed m_2 sono inizialmente fermi, mentre il punto materiale di massa m_0 ha una velocità iniziale v_0 diretta come in figura. Il punto materiale di massa m_0 urterà dunque elasticamente il punto materiale di massa m_1 che a sua volta urterà elasticamente il punto materiale di massa m_2. Si trascuri inoltre ogni forma di attrito tra il piano orizzontale ed i punti materiali.

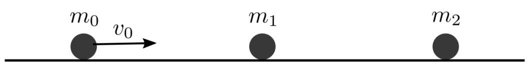
- Calcolare la velocità finale v_2 del punto materiale di massa m_2 in funzione di v_0.

Si introduca ora un coefficiente di attrito dinamico $\mu_d = 0.1$ tra il piano orizzontale ed i punti materiali. Si assuma che i tre punti materiali siano inizialmente equidistanziati come mostrato in figura (b), con $d = 1$ m. La velocità iniziale v_0 del punto materiale di massa m_0 è $v_0 = 10\frac{m}{s}$. Gli urti avvengono in tempo molto breve, pertanto lo spostamento dei punti materiali durante l'urto è trascurabile.

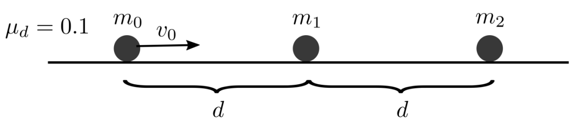
- Quanto vale la velocità v_2 del punto materiale di massa m_2 immediatamente dopo l'urto?

Torniamo ora al caso del primo punto (in cui l'attrito è assente), ma assumiamo che il secondo urto (quello tra m_1 ed m_2) sia totalmente anelastico.

- Quanto vale la velocità finale v_2 dei punti materiali di massa m_1 ed m_2 in funzione di v_0?



(a)



(b)

1 Un proiettile di massa $m = 10\ g$ è dotato di velocità iniziale $V_1 = 60\ m/s$. Esso colpisce un sacchetto di sabbia di massa $M = 2\ Kg$, inizialmente fermo ($V_2 = 0$), e si conficca in esso. Quanta energia si dissipa nell'urto?

L'urto è totalmente anelastico. La velocità finale è la velocità del centro di massa:

$$Q_f = (m+M)V_f = mV_1 + MV_2 = mV_1 = Q_i$$

$$\Rightarrow V_f = \frac{mV_1}{m+M} = \frac{0{,}01\,Kg \cdot 60\ m/s}{2{,}01\ Kg} = 0{,}3\ m/s$$

L'energia cinetica iniziale è:

$$K_i = \frac{1}{2} m V_1^2$$

quella finale è:

$$K_f = \frac{1}{2}(m+M)V_f^2 = \frac{1}{2}(m+M)\frac{m^2V_1^2}{(m+M)^2} = \frac{1}{2}mV_1^2 \frac{m}{m+M} = K_i \frac{m}{m+M}$$

L'energia dissipata è:

$$K_f - K_i = K_i \frac{m}{m+M} - K_i = K_i\left(1 - \frac{m}{m+M}\right) = K_i\left(\frac{M}{m+M}\right)$$

ma $\frac{M}{m+M} \simeq 1$ quindi $K_f - K_i \simeq K_i$

cioè quasi tutta l'energia cinetica è dissipata durante l'urto. ■

[2] Due sfere di acciaio P_1 e P_2 di masse rispettivamente $m_1 = m$ e $m_2 = 2m$ sono appese ciascuna a un filo di lunghezza ℓ in modo da costituire due pendoli semplici contigui. Lasciando la sfera P_2 ferma nella posizione iniziale ($\theta_{i2} = 0$, $V_{i2} = 0$) la sfera P_1 viene portata a formare un angolo $\theta_{i1} = 45°$ con la verticale e poi lasciata andare da ferma. Quali angoli θ_{f1} e θ_{f2} raggiungono le due sfere dopo l'urto che è supposto elastico? (2)

Prima dell'urto applichiamo la conservazione dell'energia a P_1:

$$\frac{1}{2}m_1 V_{i1}^2 = m_1 g \ell(1-\cos\theta_{i1}) \Rightarrow V_{i1} = \sqrt{2g\ell(1-\cos\theta_{i1})}$$

L'urto è elastico, quindi si conserva sia l'energia che la quantità di moto:

$$\begin{cases} m_1 V_{i1} = m_1 V_{f1} + m_2 V_{f2} \Rightarrow m\sqrt{2g\ell(1-\cos\theta_{i1})} = mV_{f1} + 2mV_{f2} \\ \frac{1}{2}m_1 V_{i1}^2 = \frac{1}{2}m_1 V_{f1}^2 + \frac{1}{2}m_2 V_{f2}^2 \Rightarrow \frac{1}{2}m(2g\ell(1-\cos\theta_{i1})) = \frac{1}{2}mV_{f1}^2 + mV_{f2}^2 \end{cases}$$

con $x = V_{f1}$
$y = V_{f2}$
$a = \sqrt{2g\ell(1-\cos\theta_{i1})}$

$$\begin{cases} ma = mx + 2my \\ \frac{1}{2}ma^2 = \frac{1}{2}mx^2 + my^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = x + 2y \\ a^2 = x^2 + 2y^2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = a - 2y \Rightarrow x = a - \frac{4a}{3} = -\frac{1}{3}a \\ a^2 = a^2 + 4y^2 - 4ay + 2y^2 \Rightarrow 6y^2 - 4ay = 0 \Rightarrow y(3y - 2a) = 0 \end{cases}$$

$$y_{1/2} = \begin{cases} 0 \\ \frac{2}{3}a \quad \text{SOLUZIONE} \end{cases}$$

Quindi: $V_{f1} = -\frac{1}{3}\sqrt{2g\ell(1-\cos\theta_{i1})}$

$V_{f2} = \frac{2}{3}\sqrt{2g\ell(1-\cos\theta_{i1})}$

Dopo l'urto, applichiamo nuovamente la conservazione dell'energia ai due pendoli: ③

$$1:\ \frac{1}{2}m_1 V_{f1}^2 = m_1 g l(1-\cos\theta_{f1}) \Rightarrow \frac{1}{2}m\frac{1}{9}2gl(1-\cos\theta_{i1}) = mgl(1-\cos\theta_{f1})$$

$$\Rightarrow \frac{1}{9}(1-\cos\theta_{i1}) = (1-\cos\theta_{f1}) \Rightarrow \cos\theta_{f1} = 1-\frac{1}{9}+\frac{\cos\theta_{i1}}{9} =$$

$$= \frac{8-\cos\theta_{i1}}{9} = \frac{8-\frac{\sqrt{2}}{2}}{9} = \frac{16-\sqrt{2}}{18} \simeq 0{,}81 \Rightarrow \theta_{f1} \simeq 36°$$

$$2:\ \frac{1}{2}m_2 V_{f2}^2 = m_2 g l(1-\cos\theta_{f2}) \Rightarrow \frac{4}{9}(2gl(1-\cos\theta_{i1})) = 2gl(1-\cos\theta_{f2})$$

$$\Rightarrow \frac{4}{9}(1-\cos\theta_{i1}) = 1-\cos\theta_{f2} \Rightarrow \frac{4}{9}\left(1-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)-1 = -\cos\theta_{f2}$$

$$\Rightarrow \cos\theta_{f2} = 1-\frac{4}{9}+\frac{2\sqrt{2}}{9} = \frac{5+2\sqrt{2}}{9} \simeq 0{,}87 \Rightarrow \theta_{f2} \simeq 30° \ \blacksquare$$

Soluzione Esercizio 2

Indichiamo con v_1 la velocità del punto materiale di massa $m_1 = m/2$ dopo il primo urto. Come visto a lezione ed esercitazione, dal momento che l'urto è elastico e che m_1 è inizialmente fermo, si ha

$$v_1 = \frac{2m_0}{m_0 + m_1} v_0 = \frac{4}{3} v_0. \tag{8}$$

Applicando la stessa formula all'urto elastico tra m_1 ed m_2 si ha

$$v_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 = \frac{4}{3} v_1 = \left(\frac{4}{3}\right)^2 v_0 \ . \tag{9}$$

Assumiamo ora $v_0 = 10\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ e che il coefficiente di attrito dinamico μ_d tra piano orizzontale e punti materiali sia $\mu_d = 0.1$. La velocità, che indichiamo con $\tilde{v}_0$ con cui il punto materiale m_0 urta il punto materiale m_1 sarà data da

$$\tilde{v}_0 = v_0 - \mu_d g \Delta t \ , \tag{10}$$

dove Δt è l'intervallo di tempo che impiega a percorrere la distanza $d = 1m$ e che si ottiene da

$$d = v_0 \Delta t - \frac{1}{2} \mu_d g \Delta t^2 \implies \Delta_t = \frac{1}{\mu_d g} \cdot (v_0 \pm \sqrt{v_0^2 - 2\mu_d g d}), \tag{11}$$

e la soluzione da prendere è quella con segno meno. Si ha pertanto

$$\tilde{v}_0 = \sqrt{v_0^2 - 2\mu_d g d} \sim 9.90\,\mathrm{m\,s^{-1}} \ . \tag{12}$$

Dopo il primo urto elastico tra m_0 ed m_1, la velocità del punto materiale m_1 immediatamente dopo l'urto è data da

$$v_1 = \frac{2m_0}{m_0 + m_1} \tilde{v}_0 = \frac{4}{3} \tilde{v}_0 \sim 13.20\,\mathrm{m\,s^{-1}} \ . \tag{13}$$

Indicando con $\tilde{v}_1$ la velocità del punto materiale di massa m_1 subito prima del secondo urto, si ha di nuovo

$$\tilde{v}_1 = \sqrt{v_1^2 - 2\mu_d g d} \sim 13.13\,\mathrm{m\,s^{-1}} \ , \tag{14}$$

e la velocità finale del punto materiale m_2 subito dopo l'urto sarà dunque data da

$$v_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} \tilde{v}_1 = \frac{4}{3} \tilde{v}_1 \sim 17.50\,\mathrm{m\,s^{-1}} \ . \tag{15}$$

Torniamo ora al caso senza attrito. La velocità v_2 dei punti materiali di massa m_1 ed m_2, nel caso in cui il secondo urto sia totalmente anelastico, si ottiene da

$$m_1 v_1 = (m_1 + m_2) v_2 \ , \tag{16}$$

con $v_1 = \frac{4}{3} v_0$. Pertanto

$$v_2 = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_1 = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{3} \cdot v_0 \ . \tag{17}$$