FS110 Fisica 1 - CdL in Matematica

Tutorato 6

Docente: Paola Gallo;
Tutor: Matteo Romoli e Davide Zaccaria.

12 Aprile 2023

Esercizio 1

Una massa $m = 0,6$ kg è connessa a una molla e oscilla orizzontalmente con periodo $T = 1,57$ s e l'allungamento totale è pari a $d = 0,4$ m.

Determinare la costante elastica della molla, l'energia totale del sistema e la posizione in cui l'energia cinetica è uguale all'energia potenziale.

Esercizio 2

Lungo un piano inclinato con angolo rispetto all'orizzonte pari a $\theta = 30°$, vengono fatti scendere due cubi di uguale massa pari a $m = 2$ kg, ma con differente coefficiente di attrito ($\mu_1 = 0,4$ per quello più in basso, $\mu_2 = 0,2$ per quello più in alto).

I cubi sono inizialmente fermi e distanti $d = 1$ m. Vengono liberati entrambi all'istante $t = 0$. Calcolare:

- Dopo quanto tempo le due masse urtano
- La velocità del sistema dopo il contatto se i cubi rimangono attaccati
- L'accelerazione con cui scende il sistema unito dopo l'urto
- La forza F che il cubo più in alto esercita su quello più in basso quando sono attaccati.

Esercizio 3

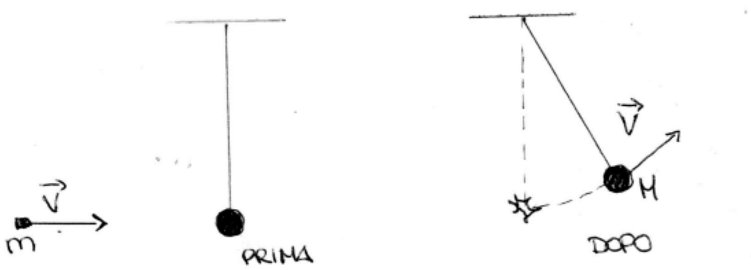
Due punti materiali si muovono su un piano orizzontale liscio con velocità tra loro parallele e concordi di valore $v_1 = 10$ m/s e $v_2 = 5$ m/s. Le masse sono uguali a $m = 0.5$ kg. Ad un certo istante i due punti si urtano elasticamente.

1. Calcolare la velocità di m_2 rispetto a m_1 dopo l'urto.
2. Dopo l'urto, m_2 si aggancia all'estremo di una molla di costante elastica k, fissata all'altro estremo. Si osserva che il punto compie oscillazioni armoniche di ampiezza $A = 0.38$ m. Calcolare k.

Esercizio 4

Un proiettile di massa $m = 0.1$ kg e velocità $v = 200$ m/s penetra in un pendolo appeso in un tempo $\tau = 5 \cdot 10^{-4}$ s. La massa totale dopo l'urto è $M = 10$ kg. Trovare

1. Di quanto si alza il pendolo;
2. Forza media durante l'urto.



[3] UNA MASSA $m = 0{,}6\ kg$ È CONNESSA A UNA MOLLA E OSCILLA ORIZZONTALMENTE CON PERIODO $T = 1{,}57\ s$ E L'ESCURSIONE TOTALE È $d = 0{,}4\ m$. DETERMINARE LA COSTANTE ELASTICA DELLA MOLLA, L'ENERGIA TOTALE DEL SISTEMA E LA POSIZIONE IN CUI L'ENERGIA CINETICA È UGUALE ALL'ENERGIA POTENZIALE.

Dallo studio dell'oscillatore armonico sappiamo che:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad e \quad \omega = \sqrt{\frac{K}{m}} \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}$$

Richiamo: CORPO AGGANCIATO A UNA MOLLA E SOGGETTO ALLA SOLA FORZA ELASTICA (studio in 1-dimensione)

Equazione del moto: $ma = -Kx \Rightarrow m\frac{d^2x}{dt^2} = -Kx$

riordiniamo: $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{K}{m}x = 0 \quad (*)$

Una possibile soluzione è: $x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$

Proviamo a sostituirla in $(*)$

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{d[A\cos(\omega t + \varphi)]}{dt} = -A\omega\,\mathrm{sen}(\omega t + \varphi)$$

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = \frac{d[-A\omega\,\mathrm{sen}(\omega t + \varphi)]}{dt} = -A\omega^2\cos(\omega t + \varphi)$$

quindi $-A\omega^2\cos(\omega t + \varphi) + \frac{K}{m}A\cos(\omega t + \varphi) = 0$

$$\Rightarrow -A\omega^2\cos(\omega t + \varphi) = -\frac{K}{m}A\cos(\omega t + \varphi) \Rightarrow \omega^2 = \frac{K}{m}$$

Quindi $T^2 = 4\pi^2\frac{m}{K} \Rightarrow K = 4\pi^2\frac{m}{T^2} = 4\pi^2\frac{0{,}6\ kg}{(1{,}57)^2\ s^2} = 9{,}6\ \frac{N}{m}$

L'energia totale è uguale al valore massimo (4)
dell'energia potenziale elastica (o a quello dell'energia cinetica). L'ampiezza dell'oscillazione è: $A = \frac{d}{2}$ quindi:

$$E = \frac{1}{2}KA^2 = \frac{1}{2}m\omega^2A^2 = 0{,}192\ J$$

In una qualunque posizione è vero che:

$$E = \frac{1}{2}KA^2 \quad ; \quad E = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}Kx^2$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}KA^2 = \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}Kx^2$$

Quando K = U ogni addendo è uguale a E/2. Quindi

$$\frac{1}{2}Kx^2 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}KA^2 \Rightarrow x^2 = \frac{1}{2}A^2 \Rightarrow x = \pm\frac{A}{\sqrt{2}} = 0{,}14\ m \ ■$$

---

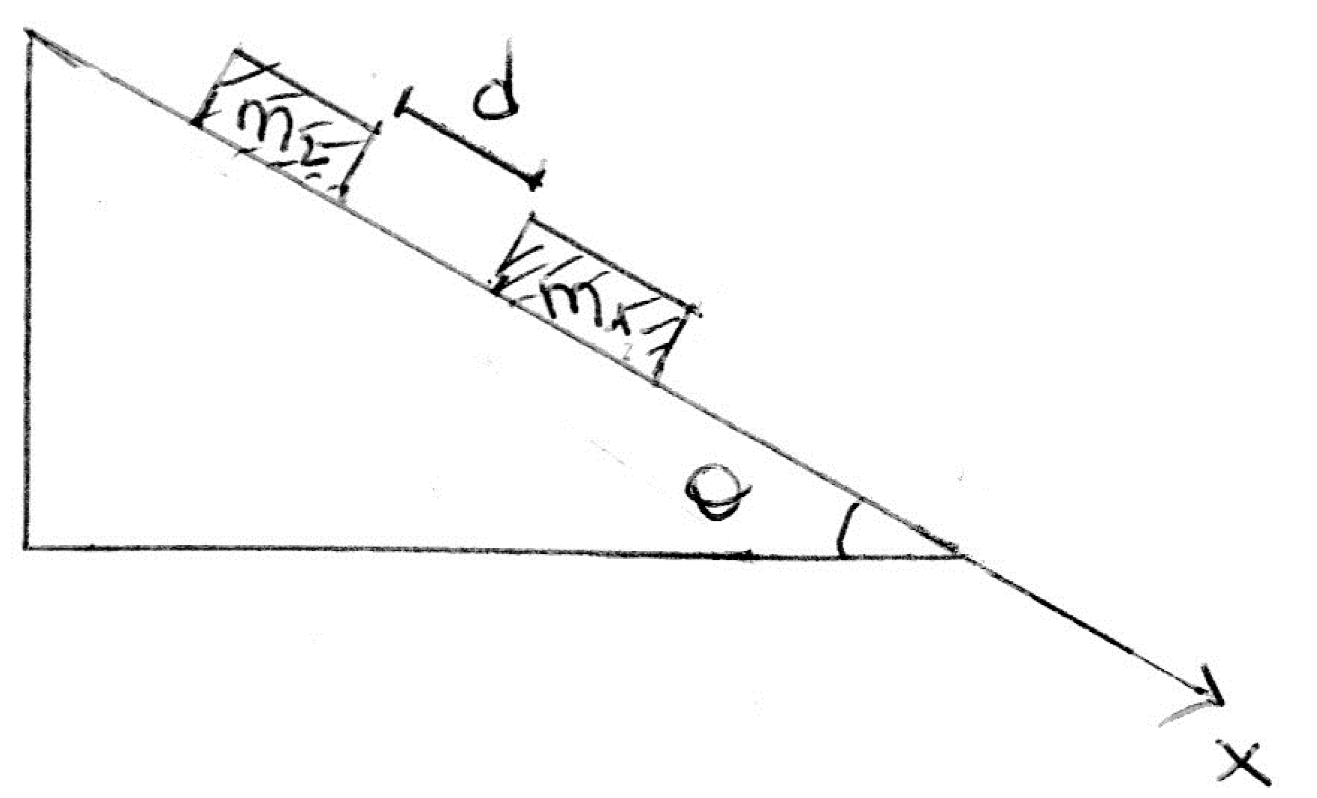
1 LUNGO UN PIANO INCLINATO ($\theta = 30°$) VENGONO FATTI SCENDERE DUE CUBI DI UGUALE MASSA $m = 2\ kg$ CON DIVERSO COEFFICIENTE DI ATTRITO COL PIANO ($\mu_1 = 0{,}4$ PER QUELLO PIÙ IN BASSO, $\mu_2 = 0{,}2$ PER L'ALTRO). I CUBI SONO INIZIALMENTE FERMI E DISTANTI $d = 1\ m$. VENGONO LIBERATI ENTRAMBI NELL'ISTANTE $t = 0$. CALCOLARE:

a) DOPO QUANTO TEMPO SI URTANO;

b) LA VELOCITÀ DEL SISTEMA DOPO IL CONTATTO SE I CUBI RIMANGONO ATTACCATI;

c) L'ACCELERAZIONE CON CUI SCENDE IL SISTEMA DOPO L'URTO;

d) LA FORZA F CHE IL CUBO A MONTE ESERCITA SU QUELLO A VALLE;



$m_1 = m_2 = m = 2\ kg$

$\mu_1 = 0{,}4 \quad \mu_2 = 0{,}2$

$d = 1\ m$

---

a) Dal secondo principio della dinamica vale che:

$$m_1 \begin{cases} ma_1 = mg\sin\theta - \mu_1 N_1 \\ N_1 = mg\cos\theta \end{cases} \qquad m_2 \begin{cases} ma_2 = mg\sin\theta - \mu_2 N_2 \\ N_2 = mg\cos\theta \end{cases}$$

da cui:

$$a_1 = g\sin\theta - \mu_1 g\cos\theta = g\left(\frac{1}{2} - \mu_1\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \simeq 1{,}51\ m/s^2$$

$$a_2 = g\sin\theta - \mu_2 g\cos\theta = g\left(\frac{1}{2} - \mu_2\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \simeq 3{,}20\ m/s^2$$

Abbiamo ricavato le accelerazioni di entrambi i blocchi che si muovono di moto uniformemente accelerato. Per trovare il tempo dell'urto basta imporre la stessa coordinata spaziale per i due blocchi cioè:

$$x_1(t) = x_2(t)$$

ovvero:

$$d + \frac{1}{2}a_1t^2 = \frac{1}{2}a_2t^2$$

(Ponendo come zero la posizione di m_2). Quindi:

$$t^2(a_1 - a_2) + 2d = 0 \Rightarrow t = \pm\sqrt{\frac{2d}{a_2 - a_1}} \simeq 1,09 \text{ s}$$

b) Se i cubi rimangono attaccati si ha, per la conservazione della quantità di moto:

$$m_1v_1 + m_2v_2 = 2mV$$

con $v_1 = a_1t$ e $v_2 = a_2t$ cioè:

$$V = \frac{m(v_1+v_2)}{2m} = \frac{a_1t + a_2t}{2} = \frac{t}{2}(a_1 + a_2) = 2,56 \text{ m/s}$$

c) Per calcolare l'accelerazione usiamo il 2° principio della dinamica per il sistema unito:

$$2mg\sin\theta - (\mu_1+\mu_2)mg\cos\theta = 2ma$$

$$\Rightarrow a = \frac{2g\sin\theta - (\mu_1+\mu_2)g\cos\theta}{2} = g\left[\sin\theta - \cos\theta\frac{(\mu_1+\mu_2)}{2}\right] =$$

$$= g\left[\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{4}(\mu_1+\mu_2)\right] \simeq 2,35 \text{ m/s}^2$$

d) Se F è la forza che la massa 2 esercita sulla massa 1 (quando sono attaccati) si ha:

$$m_1g\sin\theta - \mu_1m_1g\cos\theta + F = m_1a \quad \text{da cui:}$$

$$F = m_1\left[a - g\sin\theta + \mu_1g\cos\theta\right] \simeq 1,7 \text{ N} \blacksquare$$

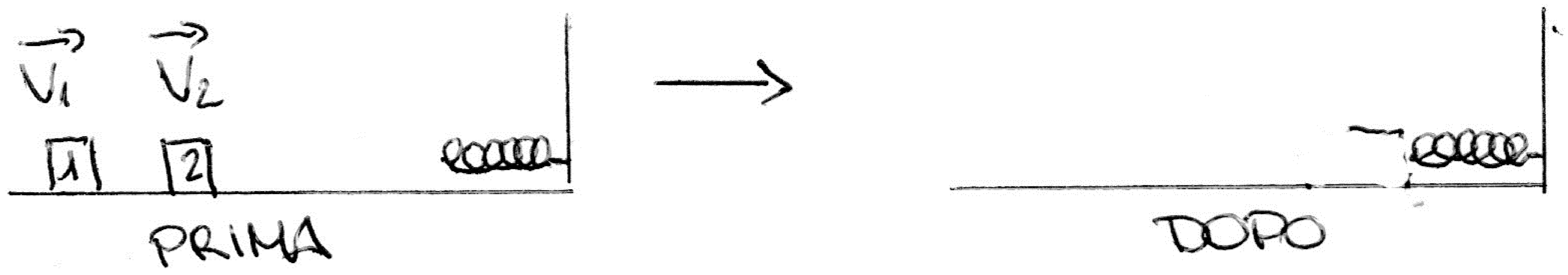
---

[2] DUE PUNTI MATERIALI SI MUOVONO SU UN PIANO ORIZZONTALE LISCIO CON VELOCITA' TRA LORO PARALLELE E CONCORDI DI VALORE $V_1 = 10$ m/s E $V_2 = 5$ m/s. LE MASSE SONO UGUALI A $m = 0,5$ kg. AD UN CERTO ISTANTE I DUE PUNTI SI URTANO ELASTICAMENTE. CALCOLARE:

a) DOPO L'URTO LA VELOCITA' DI m_2 RISPETTO A m_1.

DOPO L'URTO m_2 SI AGGANCIA A UNA MOLLA DI COSTANTE ELASTICA K FISSATA ALL'ALTRO ESTREMO. SI OSSERVA CHE IL PUNTO COMPIE OSCILLAZIONI ARMONICHE DI AMPIEZZA $A = 0,38$ m

b) CALCOLARE IL VALORE DI K.



a) Con un urto elastico si conserva sia la quantità di moto che l'energia cinetica:

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\cancel{m}V_1^2 + \frac{1}{2}\cancel{m}V_2^2 = \frac{1}{2}\cancel{m}V_1'^2 + \frac{1}{2}\cancel{m}V_2'^2 \\ mV_1 + mV_2 = mV_1' + mV_2' \Rightarrow V_2' = V_1 + V_2 - V_1' \end{cases}$$

sostituiamola nella prima equazione

$$V_1^2 + V_2^2 = V_1'^2 + (V_1 + V_2 - V_1')^2 =$$

$$= \underline{V_1^2} + \underline{\underline{V_2^2}} = V_1'^2 + \underline{V_1^2} + \underline{\underline{V_2^2}} + V_1'^2 + 2V_1V_2 - 2V_1V_1' - 2V_2V_1' \Longrightarrow$$

$$\Rightarrow V_1V_2 - V_1V_1' - V_2V_1' + V_1'^2 = 0 \qquad V_1' = x$$

$$\Rightarrow x^2 - x(V_1 + V_2) + V_1V_2 = 0$$

$$x_{1/2} = \frac{V_1 + V_2 \pm \sqrt{(V_1+V_2)^2 - V_1V_2}}{2} = \frac{(V_1+V_2) \pm \sqrt{(V_1 - V_2)^2}}{2} =$$

$$= \frac{V_1 + V_2 \pm (V_1 - V_2)}{2} = \begin{cases} V_1 \\ V_2 \end{cases} \quad \text{cioè} \quad \begin{matrix} V_1' = V_1 \\ V_1' = V_2 \end{matrix}$$

– questa soluzione è da scartare perché significa che non c'è stato urto.

Quindi, alla fine, si ha:

$V_1' = V_2$; $V_2' = V_1$ Le velocità si scambiano, cosa che si poteva dedurre dall'inizio poiché l'urto è elastico e le masse sono uguali.

La velocità di m_2 rispetto a m_1 è:

$$V_2' - V_1' = V_1 - V_2 = 5 \text{ m/s}$$

b) Dopo l'urto la massa di m_2 si attacca alla molla con $\Delta = 0{,}38$ m.

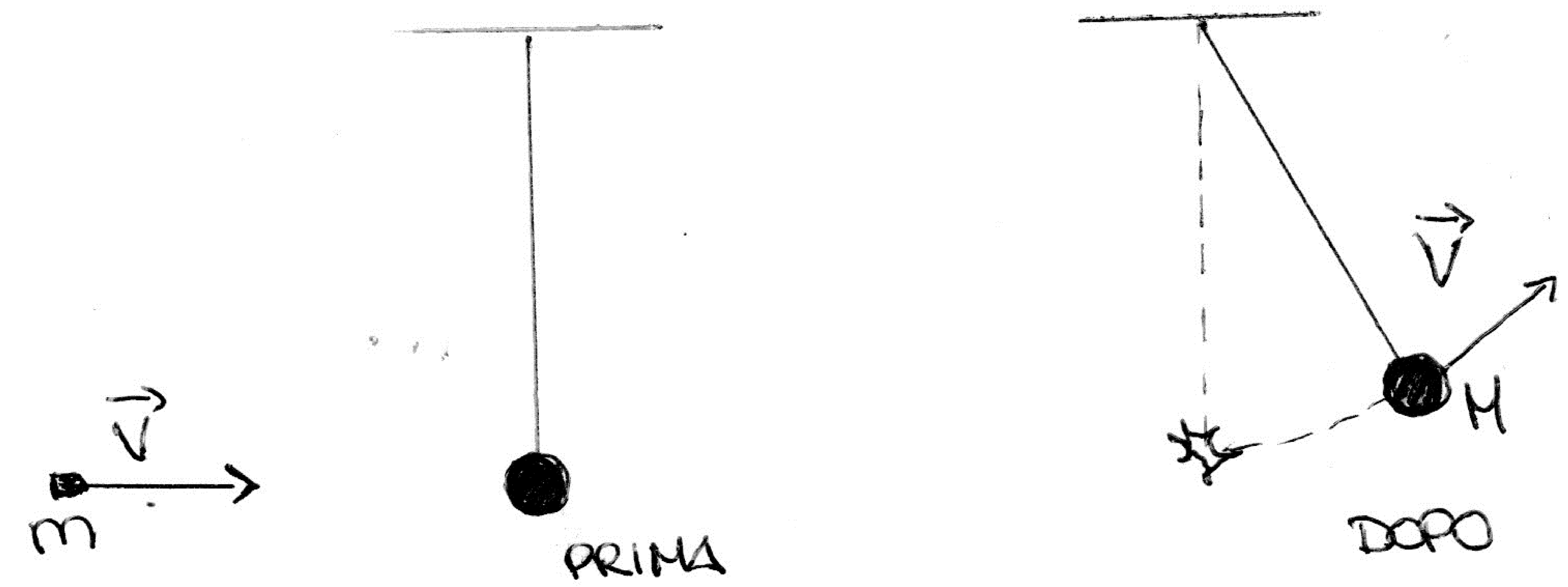
Dalla conservazione dell'energia abbiamo che:

$$\frac{1}{2}mV_2'^2 = \frac{1}{2}K\Delta^2 \Longrightarrow K = \frac{mV_2'^2}{\Delta^2} \simeq 346{,}3 \text{ N/m}$$

3. PENDOLO BALISTICO. UN PROIETTILE DI MASSA $m = 0,1\ Kg$ e VELOCITÀ $v = 200\ m/s$ PENETRA IN UN PENDOLO APPESO IN UN TEMPO $\tau = 5\cdot 10^{-4}\ s$. LA MASSA TOTALE DOPO L'URTO È $M = 10\ Kg$. TROVARE

a) DI QUANTO SI ALZA IL PENDOLO

b) FORZA MEDIA DURANTE L'URTO



a) Usiamo la conservazione della quantità di moto:

$$mv = MV \Longrightarrow V = \frac{m}{M}v = \frac{0,1}{10}\cdot 200\ \frac{m}{s} = 2\ \frac{m}{s}$$

Dopo l'urto possiamo applicare la conservazione dell'energia:

$$\frac{1}{2}MV^2 = Mgh \Longrightarrow h = \frac{V^2}{2g} = \frac{4\ m^2/s^2}{2\cdot 9,8\ m/s^2} = 0,2\ m$$

b) In questo caso usiamo il teorema dell'impulso:

"L'IMPULSO DI UNA FORZA CHE SI ESERCITA SU UN PUNTO MATERIALE IN UN INTERVALLO DI TEMPO È UGUALE ALLA VARIAZIONE DELLA QUANTITÀ DI MOTO DEL PUNTO IN QUELL'INTERVALLO DI TEMPO"

La formula è $\vec I = \Delta \vec p$

$\vec I = \vec F_m \tau$ $\Longrightarrow$ $F_m\tau = m(V - v) = m\left(\frac{mv}{M} - v\right) = mv\left(\frac{m}{M} - 1\right) =$

$\Delta\vec p = m\vec V - m\vec v$

$$= \frac{mv}{M}(m - M) \Longrightarrow F_m = \frac{mv}{\tau M}(m - M) = -39,6\cdot 10^3\ N$$

La forza è molto intensa perché si applica in un intervallo molto breve e il suo segno indica che il proiettile riceve una spinta in direzione opposta al suo moto ■