

FS110 Fisica 1 - CdL in Matematica

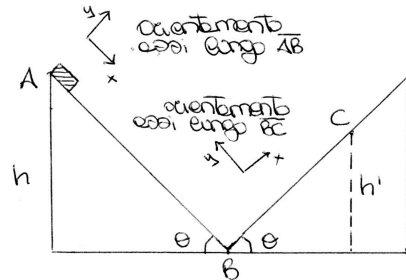
Tutorato 5

Docente: Paola Gallo;
Tutor: Matteo Romoli e Davide Zaccaria.

5 Aprile 2023

Esercizio 1

Due piani di inclinazione pari a $\theta = \frac{\pi}{4}$ sono disposti come in figura. Un corpo viene messo su uno dei due piano ad altezza $h = 6$ m e viene lasciato libero di muoversi. Il corpo raggiunge il fondo e risale fino ad un'altezza pari a $h' = 4$ m. Trovare il coefficiente di attrito dei piani.

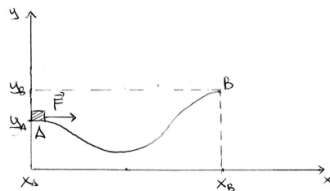


Esercizio 2

Un pendolo di massa $m = 0.86$ kg descrive una oscillazione armonica di equazione $\theta(t) = \theta_0 \sin(\omega t)$, dove $\theta_0 = 0.085$ rad e $\omega = 4.95$ rad/s. Calcolare

1. La massima variazione dell'energia potenziale
2. La differenza tra i valori di massimo e minimo della tensione.

Esercizio 3



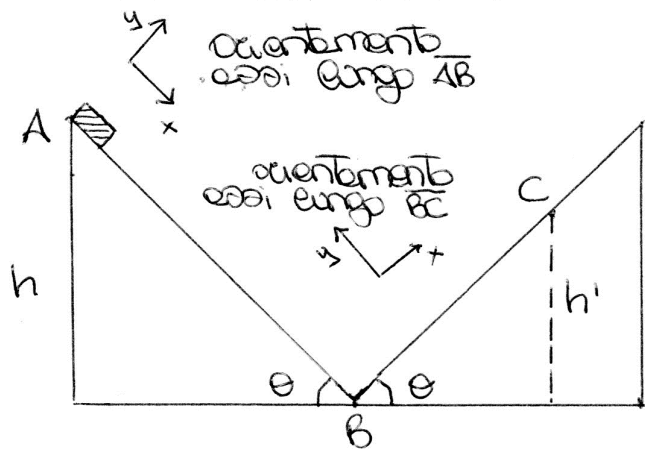
Un oggetto di massa $m = 5$ kg si muove lungo una guida liscia (vedi figura). Abbiamo $(x_A = 0; y_A = 0.5)$, $(x_B = 2; y_B = 0.8)$ (tutto misurato in metri). Al corpo è applicata una forza costante orizzontale $F = 20$ N.

1. Calcolare il lavoro delle forze agenti nello spostamento da A a B;
2. Se la velocità iniziale è nulla, quanto vale la velocità finale?

Esercizio 4

Un corpo di massa $m = 60$ kg scivola lungo un piano inclinato di angolo $\eta = 5^\circ$. Esso parte con velocità nulla e percorre una distanza pari a $d = 4$ m. Alla fine del piano il corpo percorre un tratto orizzontale liscio di lunghezza $l = 2$ m e incontra una molla di lunghezza a riposo $x_0 = 0,5$ m fissata a un muro. Calcolare quanto deve valere la costante elastica k della molla affinché il corpo tocchi il muro con velocità nulla. Ripetere il calcolo se nel tratto orizzontale c'è un coefficiente di attrito pari a $\mu = 0,14$. Infine, trovare il valore del coefficiente di attrito affinché il corpo tocchi la molla con velocità nulla.

- 1] DUE PIANI CON INCLINAZIONE DI $\theta = \pi/4$ SONO DISPOSTI COME IN FIGURA. UN CORPO VIENE MESSO SU UNO DEI DUE PIANI AD UN'ALTEZZA $h = 6 \text{ m}$. E LASCIATO LIBERO DI MUOVERSI. IL CORPO RAGGIUNGE IL FONDO E RISALE FINO AD UN'ALTEZZA $h' = 4 \text{ m}$. TROVARE IL COEFFICIENTE DI ATTRITO DINAMICO DEI PIANI.



$$h = 6 \text{ m}$$

$$h' = 4 \text{ m}$$

$$\theta = \pi/4$$

In questo caso è presente una forza d'attrito che non è conservativa quindi l'energia meccanica

non si conserva. Tuttavia la differenza di energia meccanica sarà uguale al lavoro svolto dalla forza d'attrito, cioè:

$$E_f - E_i = L_{att}$$

dove $L_{attAB} = \int_A^B \vec{F}_{att} \cdot d\vec{s} = -\mu_d N_{AB} \Delta x_{AB}$ Nel tratto $\overline{AB}$

vale che $\overline{AB} = \Delta x_{AB} = \frac{h}{\sin \theta}$ e $N_{AB} = mg \cos \theta$

quindi $L_{attAB} = -\mu_d mg \cos \theta \frac{h}{\sin \theta} = -\frac{\mu_d mgh}{\tan \theta}$

Nel tratto $\overline{BC}$ invece avremo:

$$L_{attBC} = \int_B^C \vec{F}_{att} \cdot d\vec{s} = -\mu_d N \Delta x_{BC} \quad \text{con} \quad N_{BC} = mg \cos \theta$$

$$\Delta x_{BC} = \frac{h'}{\sin \theta}$$

quindi $L_{attBC} = -\frac{\mu_d mgh'}{\tan \theta}$

Per cui: $L_{att} = L_{attAB} + L_{attBC} = -\frac{\mu_d mg(h+h')}{\tan \theta}$

quindi, alla fine:

(2)

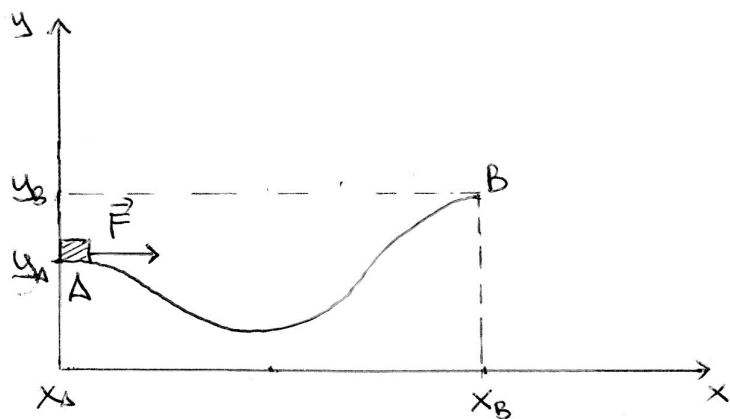
$$E_f = mgh' \Rightarrow \cancel{mg(h'-h)} = -\frac{\mu_d mg(h+h')}{\tan \theta}$$
$$E_i = mgh$$

$$\Rightarrow \mu_d = \frac{h-h'}{h+h'} \tan \theta = 0,2 \quad \blacksquare$$

[2] UN OGGETTO DI MASSA $m = 5 \text{ kg}$ SI MUOVE LUNGO UNA GUIDA LISCIA MOSTRATA IN FIGURA, NELLA POSIZIONE A LE COORDINATE SONO $(x_A = 0; y_A = 0,5 \text{ m})$ MENTRE QUELLE DI B SONO $(x_B = 2 \text{ m}; y_B = 0,8)$. AL CORPO È APPLICATA UNA FORZA COSTANTE ORIZZONTALE $F = 20 \text{ N}$.

I) CALCOLARE IL LAVORO DELLE FORZE AGENTI NELLO SPOSTAMENTO $A \rightarrow B$

II) SE LA VELOCITÀ INIZIALE È NULLA, QUANTO VALE LA VELOCITÀ FINALE?



$$m = 5 \text{ kg}$$

$$A = \begin{cases} x_A = 0 \text{ m} \\ y_A = 0,5 \text{ m} \end{cases}$$

$$B = \begin{cases} x_B = 2 \text{ m} \\ y_B = 0,8 \text{ m} \end{cases}$$

$$\vec{F} = 20 \text{ N} \cdot \hat{x}$$

Le forze in gioco sono $\vec{F}$ e $\vec{P}$. Il lavoro totale è, per definizione:

$$L = \int_A^B \vec{F}_{\text{Tot}} \cdot d\vec{s} = \int_A^B (\vec{F} + \vec{P}) \cdot d\vec{s} = \int_{x_A}^{x_B} F \cdot dx + \int_{y_A}^{y_B} P \cdot dy = F(x_B - x_A) - mg(y_B - y_A)$$
$$= 20 \text{ N}(2 \text{ m}) - 5 \text{ kg} \cdot 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} (0,3 \text{ m}) = 25,3 \text{ J}$$

Per quanto riguarda il punto II) possiamo usare il teorema dell'energia cinetica: IL LAVORO COMPIUTO DALLA FORZA RISULTANTE SU UN CORPO È PARI ALLA VARIAZIONE DI ENERGIA CINETICA DEL CORPO:

$$L = \Delta K \Rightarrow L = \frac{1}{2} m v_f^2 - \frac{1}{2} m v_i^2 \quad \text{ma } v_i = 0 \Rightarrow v_f = \sqrt{\frac{2L}{m}}$$

$$= \sqrt{\frac{25,33 \cdot 2}{5 \text{ kg}}} \approx 3,2 \text{ m/s} \quad \blacksquare$$

(3)

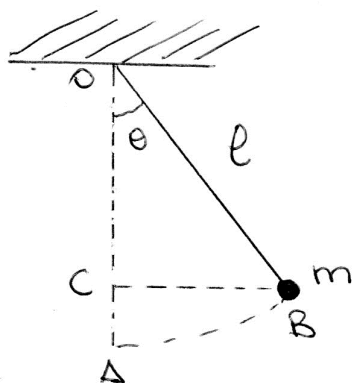
[3] Un pendolo di massa $m = 0,86 \text{ kg}$ descrive una oscillazione armonica di equazione:

$$\theta(t) = \theta_0 \sin(\omega t) \quad \theta_0 = 0,085 \text{ rad} \quad \omega = 4,95 \text{ rad/s}$$

Calcolare:

I) la massima variazione dell'energia potenziale

II) la differenza fra i valori massimo e minimo della tensione



A. Punto di minima energia potenziale

B. Punto di massima energia potenziale

Per il moto armonico:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad \text{ma} \quad \omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$\text{quindi} \quad \omega = 2\pi \cdot \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{l}} = \sqrt{\frac{g}{l}} \Rightarrow \omega^2 = \frac{g}{l} \Rightarrow l = \frac{g}{\omega^2}$$

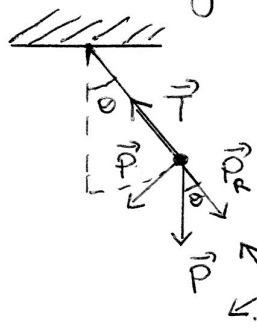
$$l = \text{lunghezza del filo} = \frac{g}{\omega^2} = \frac{9,8 \text{ m/s}^2}{24,5025 \text{ rad}^2/\text{s}^2} \approx 0,4 \text{ m}$$

La differenza di energia potenziale è data dalla differente altezza nei punti A e B ovvero da segmento CA dato da $l - l \cos \theta$ dove:

$l \cos \theta = l \cos \theta$. Quindi:

$$\Delta U = mg(l - l \cos \theta) = mgl(1 - \cos \theta) = 5 \text{ kg} \cdot 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 0,4 \text{ m} (1 - \cos \theta) = 0,07 \text{ J}$$

Per risolvere il punto II) scriviamo le equazioni di Newton lungo le direzioni radiale e tangenziale:



$$\begin{cases} m a_r = T - P_r = T - mg \cos \theta(t) \\ m a_t = P_t = mg \sin \theta(t) \end{cases}$$

← scelta degli assi

Nel moto circolare: $m a_R = m a_c = F_c$ (4)
 dove a_c e F_c sono rispettivamente l'accelerazione e la forza centripeta. Vale che:
 $a_c = \omega^2 \cdot l = \frac{v^2}{l}$ quindi $F_c = m \frac{v^2}{l}$

Per cui la 2^a equazione del moto in direzione radiale diventa:

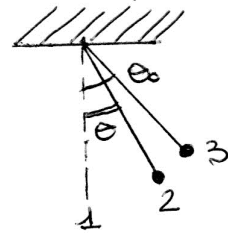
$$m a_R = m \frac{v^2}{l} = T - mg \cos \theta \quad (*)$$

Quando:
 - $a(t) = 0$ c'è solo energia cinetica

- $a(t) = e_0$ c'è solo energia potenziale

- $a(t) \neq \{0, e_0\}$ c'è sia un contributo cinetico che uno potenziale

Utiliamo ora il principio di conservazione dell'energia: in un qualunque istante con angolo θ , l'energia meccanica totale si conserva:



$$\underbrace{\frac{1}{2} m v^2 + m g l (1 - \cos \theta)}_{\text{ENERGIA TOTALE NEL PUNTO 2 (CINETICA + POTENZIALE)}} = \underbrace{m g l (1 - \cos \theta_0)}_{\text{ENERGIA TOTALE NEL PUNTO 3 (TUTTA POTENZIALE)}}$$

Ricaviamo la velocità:

$$v(\theta) = 2 g l (\cos \theta - \cos \theta_0) \quad \text{e sostituendo nell'equazione (*)}$$

$$\begin{aligned} T(\theta) &= m \frac{v^2}{l} + m g \cos \theta = 2 m g (\cos \theta - \cos \theta_0) + m g \cos \theta \\ &= 3 m g \cos \theta - 2 m g \cos \theta_0 = m g (3 \cos \theta - 2 \cos \theta_0) \end{aligned}$$

$$T_{\max}(\theta = 0) = m g (3 - 2 \cos \theta_0)$$

$$T_{\min}(\theta = \theta_0) = m g \cos \theta_0$$

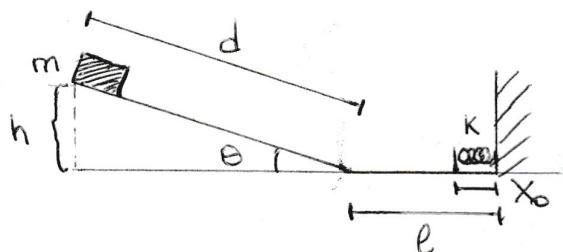
$$\text{Quindi } \Delta T = T_{\max} - T_{\min} = m g (3 - 2 \cos \theta_0) - m g \cos \theta_0 =$$

$$= 3 m g - 3 m g \cos \theta_0 = 3 m g (1 - \cos \theta_0) =$$

$$= 3 \cdot 0,86 \text{ Kg} \cdot 9,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot (1 - \cos(0,285)) = 0,091 \text{ N} = 9,1 \cdot 10^{-2} \text{ N} \quad \blacksquare$$

2) UN CORPO DI MASSA $m = 60 \text{ kg}$ SCIVOLA LUNGO UN PIANO INCLINATO DI $\theta = 5^\circ$. ESSO PARTE CON VELOCITA' NULLA E PERCORRE UNA DISTANZA $d = 4 \text{ m}$. ALLA FINE DEL PIANO IL CORPO PERCORRE UN TRATTO ORIZZONTALE LISCIO DI LUNGHEZZA $\ell = 2 \text{ m}$ E INCONTRA UNA MOLLA DI LUNGHEZZA A RIPOSO $x_0 = 0,5 \text{ m}$ FISSATA A UN MURO. CALCOLARE QUANTO DEVE VALERE LA COSTANTE ELASTICA K DELLA MOLLA AFFINCHÉ IL CORPO TOCCHI IL MURO CON VELOCITA' NULLA.

RIPETERE IL CALCOLO SE NEL TRATTO ORIZZONTALE C'É UN COEFFICIENTE DI ATRITO $\mu = 0,16$.
INFINE, TROVARE IL VALORE DI μ NECESSARIO PERCHÉ IL CORPO TOCCHI LA MOLLA CON VELOCITA' NULLA.



Il corpo si trova inizialmente a un'altezza:

$$h = d \sin \theta$$

Applichiamo quindi la conservazione dell'energia che all'inizio è tutta energia potenziale, poi diventa

energia cinetica e infine diventa energia potenziale elastica:

$$mgh = \frac{1}{2} K x_0^2 \Rightarrow K = \frac{2mgh}{x_0^2} = \frac{2 \cdot 60 \text{ kg} \cdot 9,8 \text{ m/s}^2 \cdot 4 \text{ m} \cdot \sin \theta}{(0,5)^2 \cdot \text{m}^2}$$

$$= 1,660 \cdot 10^3 \text{ N/m}$$

Se nel tratto orizzontale c'è attrito la precedente relazione diventa:

$$\frac{1}{2} K x_0^2 - mgh = -\mu mg \cdot \ell \Rightarrow \frac{1}{2} K x_0^2 = mg(h - \mu \ell)$$

$$\Rightarrow K = \frac{2mg(h - \mu \ell)}{x_0^2} = \frac{2 \cdot 60 \text{ kg} \cdot 9,8 \text{ m/s}^2 (4 \text{ m} \cdot \sin \theta - 0,16 \cdot 2 \text{ m})}{(0,5)^2 \cdot \text{m}^2}$$

$$= 3,2 \cdot 10^2 \text{ N/m}$$

Se il corpo non deve urtare la molla: (3)

$$\begin{aligned} 0 - mgh &= -\mu mg(l - x_0) \Rightarrow \mu = \frac{h}{l - x_0} = \frac{\Delta \text{ene}}{l - x_0} \\ &= \frac{4 \text{ m} \cdot \Delta \text{ene}}{1,5 \text{ m}} = 0,23 \quad \blacksquare \end{aligned}$$

[3] UNA MASSA $m = 0,6 \text{ kg}$ È CONNESSA A UNA MOLLA E OSCILLA ORIZZONTALMENTE CON PERIODO $T = 1,57 \text{ s}$ E L'ESCURSIONE TOTALE È $d = 0,4 \text{ m}$. DETERMINARE LA COSTANTE ELASTICA DELLA MOLLA, L'ENERGIA TOTALE DEL SISTEMA E LA POSIZIONE IN CUI L'ENERGIA CINETICA È UGUALE ALL'ENERGIA POTENZIALE.

Dallo studio dell'oscillatore armonico sappiamo che:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad \text{e} \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

Risultato: CORPO AGGANCIATO A UNA MOLLA E SOGGETTO ALLA SOLA FORZA ELASTICA (studio in 1-dimensione)

Equazione del moto: $ma = -Kx \Rightarrow m \frac{d^2x}{dt^2} = -Kx$

Coordiniamo: $\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{K}{m}x = 0 \quad (*)$

Una possibile soluzione è: $x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$

Possiamo sostituire in (*).

$$\frac{dx(t)}{dt} = \frac{d[A \cos(\omega t + \varphi)]}{dt} = -A\omega \sin(\omega t + \varphi)$$

$$\frac{d^2x(t)}{dt^2} = \frac{d[-A\omega \sin(\omega t + \varphi)]}{dt} = -A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\text{quindi} \quad -A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi) + \frac{K}{m}A \cos(\omega t + \varphi) = 0$$

$$\Rightarrow -A\omega^2 \cos(\omega t + \varphi) = -\frac{K}{m}A \cos(\omega t + \varphi) \Rightarrow \omega^2 = \frac{K}{m}$$

$$\text{Quindi} \quad T^2 = 4\pi^2 \frac{m}{K} \Rightarrow K = \frac{4\pi^2 m}{T^2} = \frac{4\pi^2 \cdot 0,6 \text{ kg}}{(1,57)^2 \text{ s}^2} = 9,6 \frac{\text{N}}{\text{m}}$$