FS110 Fisica 1 - CdL in Matematica

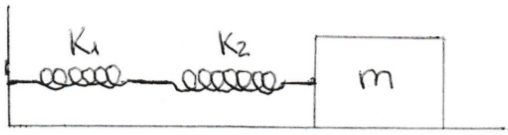
Tutorato 4

Docente: Paola Gallo;
Tutor: Matteo Romoli e Davide Zaccaria.

29 Marzo 2023

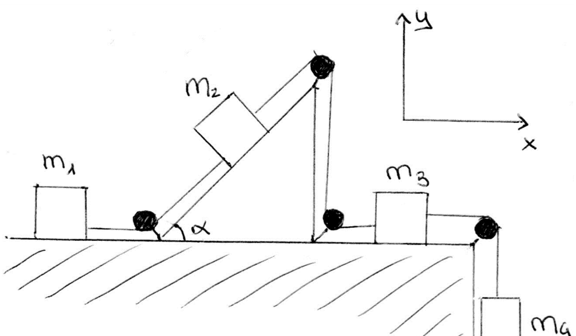
Esercizio 1

Un punto di materiale di massa $m = 0.4$ kg è attaccato a 2 molle in serie (vedi figura) con costanti elastiche $k_1 = 20$ N/m e $k_2 = 30$ N/m. Calcolare il periodo delle oscillazioni armoniche del punto.



Esercizio 2

Considerare la configurazione descritta nella figura, in cui funi e carrucole sono da considerarsi ideali.



Dati m_1, m_2, m_3 e α, trovare:

1. il valore di m_4 affinchè l'intero sistema non sia accelerato.
2. il valore di m_4 affinchè quest'ultima massa abbia un'accelerazione di modulo $a = \frac{g}{2}$ rivolta verso il basso.
3. Inserendo l'attrito tra il piano e le masse m_1 e m_3 con coefficienti di attrito dinamico dati $\mu_1 = \mu_3$, determinare il valore di m_4 affinchè quest'ultima massa abbia un'accelerazione di modulo $a = \frac{g}{2}$ rivolta verso il basso.
4. Inserendo l'attrito tra il piano e le masse m_1, m_2 e m_3 con coefficienti di attrito dinamico dati $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$, determinare il lavoro compiuto dalla forza di attrito affinchè la massa m_4 sia ferma.
5. Considerando le condizioni del punto 4., calcolare il lavoro compiuto dalla forza di attrito dopo che m_4 è scesa con $a = \frac{g}{2}$ per $t = 1s$.

Esercizio 3

E' in corso una gara di lancio del martello. Le caratteristiche del martello sono: $m = 7,285\ kg$, distanza fra la testa dell'atleta e l'impugnatura del martello $d = 121,5\ cm$. Consideriamo la fune del martello ideale, consideriamo l'atleta di altezza trascurabile, in modo che il martello parta da un'altezza nulla, ed infine consideriamo tutto senza attrito.

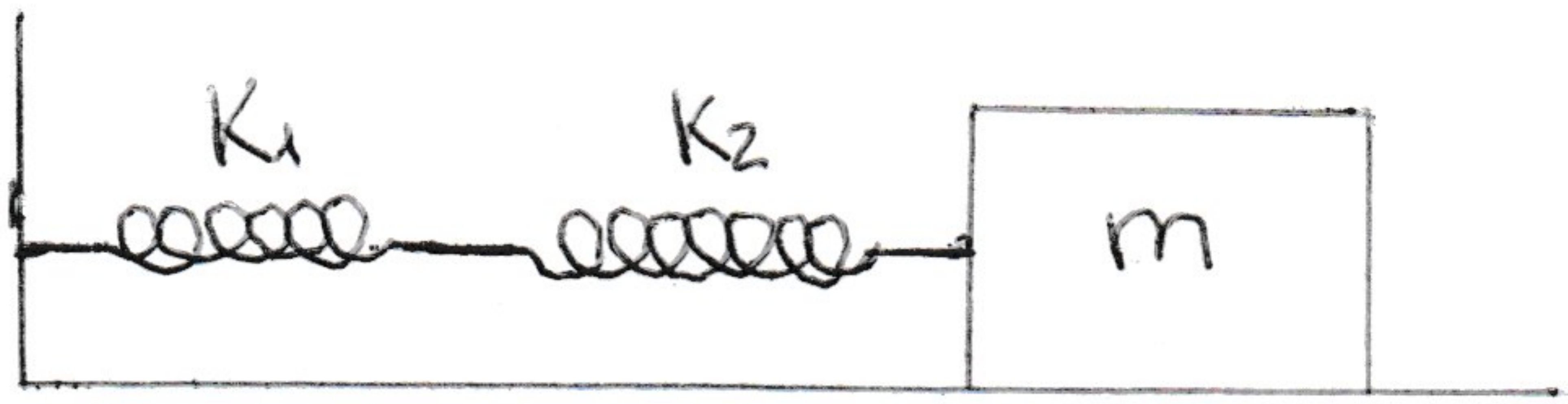
Il lanciatore si posiziona sulla pedana, e prima di far partire il martello lo fa ruotare per 3 giri e $\frac{1}{4}$ di giro. Effettua 3 lanci con i seguenti valori:

- **1 lancio**: accelerazione angolare da considerare costante paria $\alpha_1 = 13\frac{rad}{s^2}$; angolo di lancio, ossia angolo di separazione del martello rispetto alla verticale nel momento del lancio pari a $\varphi_1 = 52,00°$.
- **2 lancio**: $\alpha_2 = 14\frac{rad}{s^2}$, $\varphi_2 = 50,00°$, ma in questo lancio è presente un vento diretto orizzontalmente contro la direzione del lancio di modulo pari a $F = 2\ N$.
- **3 lancio**: $\alpha_3 = 15\frac{rad}{s^2}$, $\varphi_3 = 57,00°$, ma in questo lancio è presente un vento diretto orizzontalmente contro la direzione del lancio di modulo pari a $F = 1,8\ N$.

Sapendo che gli altri atleti hanno fatto i seguenti lanci: $82,91\ m; 79,92\ m$ e $75\ m$, come si sarà posizionato il nostro atleta?

Inoltre calcolare il valore della forza centripeta:
1) Durante il primo lancio, prima che venga lasciato il martello, dopo 2 giri completi.
2) Durante il secondo lancio, prima che venga lasciato il martello, dopo 1 giro completo.
3) Durante il terzo lancio nel momento in cui viene lasciato il martello.

$\boxed{2}$ UN PUNTO MATERIALE DI MASSA $m = 0{,}4$ Kg È ATTACCATO A 2 MOLLE CON COSTANTI ELASTICHE $K_1 = 20$ N/m e $K_2 = 30$ N/m. CALCOLARE IL PERIODO DELLE OSCILLAZIONI ARMONICHE DEL PUNTO (in figura è mostrato il sistema a riposo).



$m = 0{,}4$ Kg

$K_1 = 20 \frac{N}{m}$ $\quad K_2 = 30 \frac{N}{m}$

la massa m è collegata direttamente solo alla molla K_2. Indichiamo con x_1 l'allungamento della molla K_1 e x_2 l'allungamento della molla K_2. Abbiamo che:

$$ma = -K_2(x_2 - x_1)$$

e per la molla K_1:

$$K_2(x_2 - x_1) - K_1 x_1 = 0 \Longrightarrow x_1 = \frac{K_2 x_2}{K_1 + K_2}$$

e sostituiamola nella 1ª equazione:

$$ma = -K_2 x_2 + \frac{K_2^2 x_2}{K_1 + K_2} \Longrightarrow ma = x_2\left(\frac{K_2^2}{K_1 + K_2} - K_2\right) =$$

$$= x_2\left(\frac{\cancel{K_2^2} - K_2 K_1 - \cancel{K_2^2}}{K_1 + K_2}\right) = -x_2\left(\frac{K_2 K_1}{K_1 + K_2}\right)$$

questo rapporto è il K_{TOT} che ci permette di trattare le 2 molle come fossero un'unica molla.

Quindi:

$$ma = -x_2 \frac{K_1 K_2}{K_1 + K_2} = -x_2 K_{TOT}$$

Ora possiamo trovare il periodo dell'oscillazione, che è:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{K_{TOT}}} = 2\pi \sqrt{\frac{m(K_1 + K_2)}{K_1 K_2}} = 1{,}15\ s \ \blacksquare$$

1. CONSIDERARE LA CONFIGURAZIONE DATA IN FIGURA. FUNI E CARRUCOLE SONO IDEALI.
DATI m_1, m_2, m_3 E α, CALCOLARE:

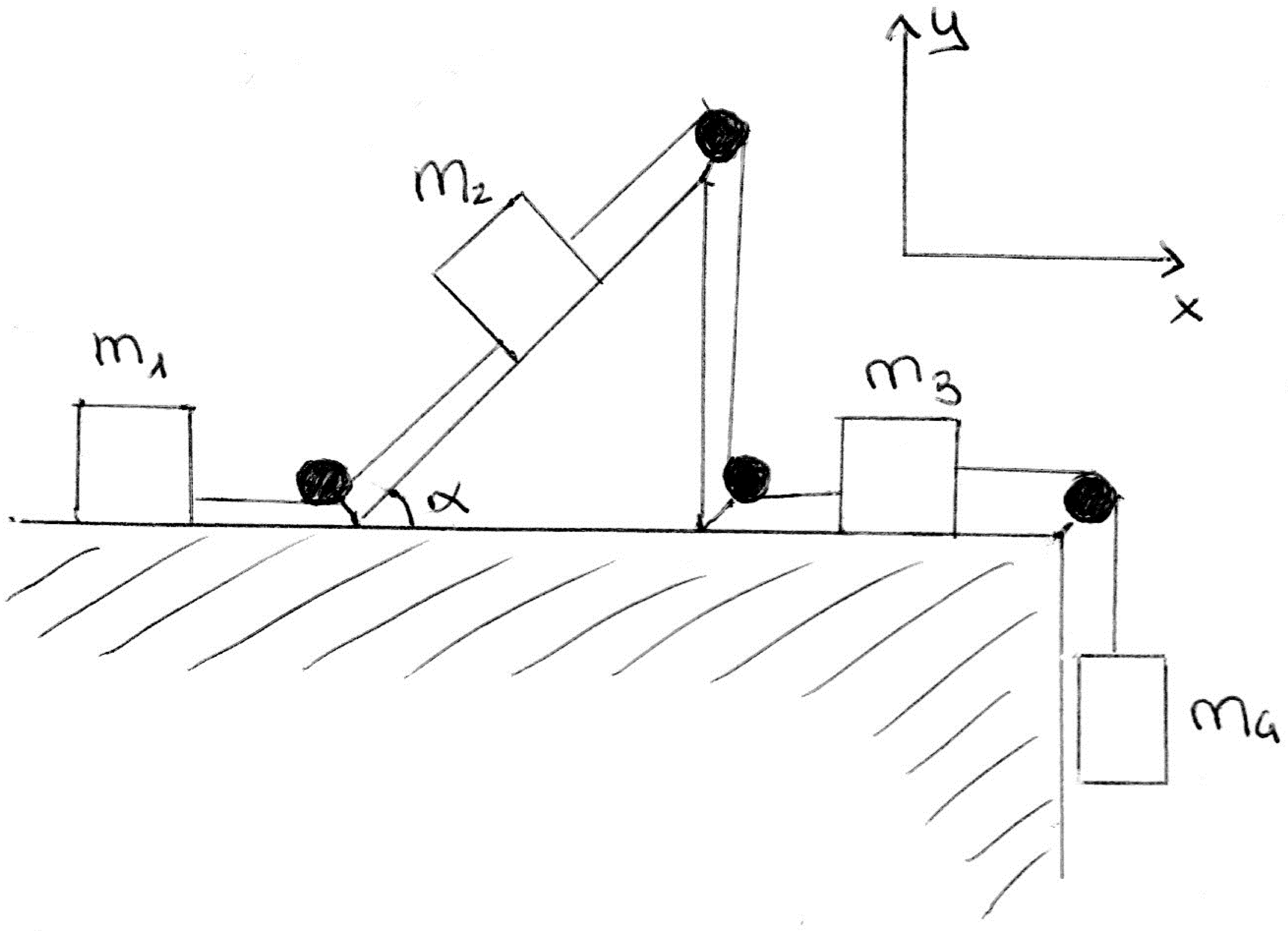
a) IL VALORE DI m_4 PER CUI L'INTERO SISTEMA NON È ACCELERATO

b) IL VALORE DI m_4 PER CUI QUESTA HA UN'ACCELERAZIONE $a = g/2$ RIVOLTA VERSO IL BASSO

c) INSERENDO L'ATTRITO $\mu_1 = \mu_3$ TRA IL PIANO E LE MASSE (1 e 3) DETERMINARE IL VALORE DI m_4 IN MODO CHE QUESTA ABBIA ACCELERAZIONE $a = g/2$ RIVOLTA VERSO IL BASSO

d) INSERENDO L'ATTRITO $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$ TRA I PIANI E LE MASSE 1, 2 e 3 DETERMINARE IL LAVORO COMPIUTO DALLA FORZA D'ATTRITO PER FAR SI CHE m_4 SIA FERMA

e) CONSIDERANDO LE CONDIZIONI DEL PUNTO d) CALCOLARE IL LAVORO FATTO DALLA FORZA DI ATTRITO DOPO CHE m_4 È SCESA CON $a = g/2$ PER $t = 1$ s.



Le forze in gioco per ogni massa in assenza di attriti sono
- la forza peso
- la reazione del piano
- le tensioni delle funi

a) Scriviamo le forze in gioco per ogni massa ricordando che il sistema ha accelerazione = 0

$$m_1 \begin{cases} N_1 - P_1 = 0 \\ T_1 = 0 \end{cases} \qquad m_2 \begin{cases} N - P_2 \sin\alpha = 0 \\ T_2 - T_1 - P_2 \sin\alpha = 0 \end{cases}$$

Nel caso della m_2, di solito scriviamo la forza peso nelle due componenti // e ⊥ al piano inclinato.

$$m_3 \begin{cases} N_3 - P_3 = 0 \\ T_4 - T_2 = 0 \end{cases} \qquad m_4 \begin{cases} T_4 - P_4 = 0 \end{cases}$$

Ovviamente vale che le carrucole fanno cambiare direzione alle tensioni. Per questo, ad esempio su m_3

agiscono T_4 e T_2. Dalle equazioni precedenti ricaviamo che:

$T_1 = 0$

$T_2 = P_2 \operatorname{sen}\alpha = m_2 g \operatorname{sen}\alpha$

$T_4 = T_2$

$T_4 = P_4 \Rightarrow P_4 = T_2 \Rightarrow m_4 g = m_2 g \operatorname{sen}\alpha \Rightarrow m_4 = m_2 \operatorname{sen}\alpha$

---

b) Riscriviamo le equazioni precedenti a partire da m_4, considerando che ora questa accelera con $g/2$ verso il basso:

$m_4 \left\{ T_4 - P_4 = m_4 \frac{g}{2} \Rightarrow T_4 = m_4 g + m_4 \frac{g}{2} = m_4 \frac{3g}{2} \right.$ lungo $\hat{y}$

$m_3 \left\{ T_4 - T_2 = m_3 a = m_3 \frac{g}{2} \Rightarrow T_4 = m_3 \frac{g}{2} + T_2 \right.$ lungo $\hat{x}$

$m_2 \left\{ T_2 - T_1 - P_2 \operatorname{sen}\alpha = m_2 a = m_2 \frac{g}{2} \right.$ lungo $\hat{x}\cos\alpha + \hat{y}\operatorname{sen}\alpha$

$\Rightarrow T_2 = T_1 + P_2 \operatorname{sen}\alpha + m_2 \frac{g}{2}$

$m_1 \left\{ T_1 = m_1 \frac{g}{2} \right.$ lungo $\hat{x}$

da cui ricaviamo:

$T_2 = \frac{g}{2}(m_1 + m_2) + m_2 g \operatorname{sen}\alpha$

$T_4 = m_4 \frac{3}{2} g = \frac{g}{2}(m_1 + m_2 + m_3) + m_2 g \operatorname{sen}\alpha$

quindi $m_4 = \frac{m_1 + m_2 + m_3}{3} + \frac{2 m_2 \operatorname{sen}\alpha}{3}$

---

c) Ora riscriviamo le equazioni considerando l'attrito per le masse m_1 e m_3:

$m_1 \left\{ T_1 - \mu_1 N_1 = m_1 \frac{g}{2} \Rightarrow T_1 = \mu_1 m_1 g + m_1 \frac{g}{2} = m_1 g \left(\mu_1 + \frac{1}{2}\right) \right.$

$m_2 \left\{ T_2 - T_1 - P_2 \operatorname{sen}\alpha = m_2 \frac{g}{2} \Rightarrow T_2 = T_1 + P_2 \operatorname{sen}\alpha + m_2 \frac{g}{2} = T_1 + m_2 g \left(\operatorname{sen}\alpha + \frac{1}{2}\right) \right.$

$m_3 \begin{cases} T_4 - T_2 - \mu_3 N_3 = m_3 \frac{g}{2} \Rightarrow T_4 = T_2 + m_3 g\left(\mu_3 + \frac{1}{2}\right) \end{cases}$

$m_4 \begin{cases} T_4 - P_4 = m_4 \frac{g}{2} \Rightarrow T_4 = m_4 g\left(1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2} m_4 g \end{cases}$

quindi alla fine avremo:

$$T_4 = T_2 + m_3 g\left(\mu_3 + \frac{1}{2}\right) = T_1 + m_2 g\left(\operatorname{sen}\alpha + \frac{1}{2}\right) + m_3 g\left(\mu_3 + \frac{1}{2}\right) =$$

$$= m_1 g\left(\mu_1 + \frac{1}{2}\right) + m_2 g\left(\operatorname{sen}\alpha + \frac{1}{2}\right) + m_3 g\left(\mu_3 + \frac{1}{2}\right) = \frac{3}{2} m_4 g$$

$$\Rightarrow m_4 = \frac{m_1 + m_2 + m_3}{3} + \frac{2(m_1\mu_1 + m_2 \operatorname{sen}\alpha + m_3 \mu_3)}{3}$$

---

d) In questo caso il sistema è fermo ma c'è anche l'attrito relativo alla massa m_2:

$m_4 \begin{cases} T_4 - P_4 = 0 \Rightarrow T_4 = P_4 \end{cases}$

$m_3 \begin{cases} T_4 - T_2 - F_{a3} = 0 \Rightarrow T_4 = T_2 + F_{a3} \end{cases}$

$m_2 \begin{cases} T_2 - P_2 \operatorname{sen}\alpha - F_{a2} - T_1 = 0 \Rightarrow T_2 = T_1 + P_2 \operatorname{sen}\alpha + F_{a2} \end{cases}$

$m_1 \begin{cases} T_1 - F_{a1} = 0 \Rightarrow T_1 = F_{a1} = \mu_1 m_1 g \end{cases}$

quindi, mettendole insieme:

$$\begin{cases} m_4 g = T_4 \\ T_4 = T_2 + F_{a3} = T_2 + \mu_3 m_3 g \\ T_2 = T_1 + P_2 \operatorname{sen}\alpha + F_{a2} = \mu_1 m_1 g + m_2 g(\operatorname{sen}\alpha + \mu_2 \cos\alpha) \end{cases}$$

$$\Rightarrow m_4 g = (m_1\mu_1 + m_3\mu_3)g + m_2 g(\operatorname{sen}\alpha + \mu_2 \cos\alpha)$$

$$\Rightarrow m_4 = m_1\mu_1 + m_3\mu_3 + m_2(\operatorname{sen}\alpha + \mu_2\cos\alpha)$$

---

e) Il lavoro della forza di attrito si calcola come:

$L_a = \vec{F}_{aTOT} \cdot \vec{S}$ dove $\vec{S}$ è lo spostamento

Data la configurazione del sistema ogni blocco si sposterà dello stesso $|\vec{s}|$, che calcoliamo col blocco 4:

$$s(t=1s) = \frac{1}{2}at^2 \quad \text{con} \quad \begin{matrix} t = 1s \\ a = g/2 \end{matrix} \quad \text{quindi} \quad s(1s) = \frac{g}{4}$$

Ogni blocco si sposterà verso destra (il 2 verso l'alto lungo il piano) di una quantità s. I vett. di attrito e di spostamento sono pertanto antiparalleli. Il lavoro totale svolto dalla forza di attrito è:

$$L_{aTOT} = L_{a1} + L_{a2} + L_{a3} = \vec{F}_{a1}\cdot\vec{s}_1 + \vec{F}_{a2}\cdot\vec{s}_2 + \vec{F}_{a3}\cdot\vec{s}_3 =$$

$$= -m_1\mu_1 g\cdot\frac{g}{4} - m_2\mu_2 g\cos\alpha\frac{g}{4} - m_3\mu_3 g\cdot\frac{g}{4} =$$

$$= -\frac{g^2}{4}(m_1\mu_1 + m_2\mu_2\cos\alpha + m_3\mu_3) \; \blacksquare$$

$\boxed{2}$ È IN CORSO UNA GARA DI LANCIO DEL MARTELLO (disciplina olimpica). LE CARATTERISTICHE DEL MARTELLO SONO:

- PESO = 7,285 Kg
- DISTANZA FRA TESTA DELL'ATLETA E IMPUGNATURA (la consideriamo una fune ideale) = 121,5 cm

L'ATLETA SI POSIZIONA AL CENTRO DELLA PEDANA FACENDO FARE AL MARTELLO 3 giri E 1/4 DALLA POSIZIONE INIZIALE (vedere immagine) FINO A LASCIARLO NELLA POSIZIONE CON LA x.

GLI ALTRI ALTLETI HANNO FATTO I SEGUENTI LANCI:
82,91 m ; 79,92 m ; 79,16 m ; 77,85 m ; 77,12 m ; 72,11 m.

IL NOSTRO ATLETA HA A DISPOSIZIONE 3 LANCI:

1° LANCIO: Accelerazione angolare $\alpha_1 = 13\ rad/s^2$. Angolo di separazione del martello rispetto alla verticale$_1$ = 52,00°

2° LANCIO: Accelerazione angolare $\alpha_2 = 14,00\ rad/s^2$
Angolo$_2$ = 50,00°
Vento lungo $-\hat{x}$ con $|\vec{F}| = 2,000$ N

3° LANCIO: Accelerazione angolare $\alpha_3 = 15\ rad/s^2$
Angolo$_3$: 57,00°
Vento lungo $\hat{x}$ con $|\vec{F}| = 1,8000\ N$

COME SARÀ POSIZIONATO IN CLASSIFICA IL NOSTRO ATLETA DOPO 3 LANCI? Considerare che il martello parte da un'altezza nulla.

INOLTRE CALCOLARE IL VALORE DELLA FORZA CENTRIPETA:
a) Durante il primo lancio dopo 2 giri completi
b) Durante il secondo lancio dopo 1 giro completo
c) Durante il terzo lancio al momento di lasciare il martello

---

Innanzitutto, troviamo la distanza raggiunta dal martello dopo ogni lancio. Per farlo, abbiamo bisogno di conoscere la velocità tangenziale del martello al momento del rilascio. Questa sarà la velocità iniziale del lancio. Per calcolare la lunghezza della traiettoria usiamo il principio di conservazione della energia meccanica e poi le equazioni del moto parabolico.

Abbiamo inizialmente un moto circolare uniformemente accelerato. L'angolo percorso prima del lancio equivale a $6\pi + \frac{\pi}{2} = \frac{13}{2}\pi$ (3 giri e 1/4). L'angolo iniziale $\theta_0 = 0$ così come la velocità angolare iniziale $\omega_0 = 0$. Abbiamo che: $\theta = \frac{1}{2}\alpha t^2$. A noi interessa la velocità tangenziale finale data da: $V_T = \omega_f \cdot r$ dove r è la distanza testa-impugnatura. Ovviamente, per trovare la velocità angolare finale vale che $\omega_f = \omega_0 + \alpha t = \alpha t$ (poiché nel nostro caso $\omega_0 = 0$) Quindi:

$\theta_0 = 0 \quad t_0 = 0$

$$\theta = \frac{13}{2}\pi = \frac{1}{2}\alpha t_f^2 \Rightarrow t_f = \pm\sqrt{\frac{13\pi}{\alpha}} \Rightarrow \omega_f = \alpha\sqrt{\frac{13\pi}{\alpha}} = \sqrt{13\pi\alpha}$$

$$\Rightarrow V_f = \omega_f \cdot r = \sqrt{13\pi\alpha} \cdot r$$

Ora chiamiamo V_i la V_f appena trovata.
Del lancio conosciamo la velocità iniziale V_i, la massa del martello m e l'angolo di lancio φ.

1° LANCIO Dobbiamo calcolare la gittata. Siamo in assenza di forze d'attrito. In questo caso vale il principio di conservazione dell'energia meccanica:

$U_i + K_i = K_f + K_f$ dove $U_i = U_f = 0$ poiché il martello parte da terra e torna a terra.

Allora $\frac{1}{2} m V_i^2 = \frac{1}{2} m V_f^2 \Rightarrow V_i = V_f$

Le componenti della velocità iniziale e finale sono uguali in modulo:

$V_x = V_i \cos\varphi$
$V_y = V_i \sin\varphi$ inoltre $\vec{V}_{ix} = V_x \hat{x}$ $\vec{V}_{fx} = V_x \hat{x}$
$\vec{V}_{iy} = V_y \hat{y}$ $\vec{V}_{fy} = -V_y \hat{y}$

Scriviamo le equazioni del moto e della velocità:

$$\begin{cases} x(t) = V_x \cdot t \\ y(t) = V_y t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} \vec{V}_{fx} = \vec{V}_{ix} \\ \vec{V}_{fy} = \vec{V}_{iy} + \vec{a} t \Rightarrow -V_y = V_y - gt \end{cases}$$

da cui $2V_y = gt \Rightarrow t = \frac{2V_y}{g}$

quindi $x_g = V_x \cdot \frac{2V_y}{g} = \frac{2V_i^2 \sin\varphi\cos\varphi}{g} = \frac{2 \cdot 13\pi\alpha r^2 \sin\varphi\cos\varphi}{g} =$

$= \frac{26\pi \alpha r^2 \sin\varphi\cos\varphi}{g} = 77{,}60\ m$

2° LANCIO In questo caso è presente una forza (del vento) diretta lungo $-\hat{x}$. Le equazioni della dinamica in questo caso cambiano:

$$\vec{F} + \vec{P} = m\vec{a} \rightarrow \begin{cases} -F = m a_x \Rightarrow a_x = -\frac{F}{m} = -0{,}275\ m/s^2 \text{ lungo } -\hat{x} \\ P = mg \end{cases}$$

Per cui avremo un moto uniformemente accelerato sia lungo $\hat{x}$ che lungo $\hat{y}$, cioè:

$$\begin{cases} x(t) = V_x t + \frac{1}{2} a_x t^2 \\ y(t) = V_y t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases} \qquad \begin{cases} V_{fx} = V_{ix} + a_x t \\ V_{fy} = V_{iy} - gt \end{cases}$$

Dall' equazione lungo $\hat{y}$ sappiamo che:

$$0 = V_y t - \frac{1}{2} g t^2 \Longrightarrow t\left(-\frac{1}{2} g t + V_y\right) = 0 \Longrightarrow \begin{array}{l} t_1 = 0 \\ t_2 = \frac{2V_y}{g} = \frac{2\sqrt{13\pi\alpha_2}\cdot r\, sen\varphi_2}{g} = 4,562 \text{ s} \end{array}$$

Quindi la gittata è:

$$x(t) = V_x \cdot t + \frac{1}{2} a_x t^2 = \sqrt{13\pi\alpha_2}\cdot r\cos\varphi_2\, t + \frac{1}{2} a_x t^2 = 81,98 \text{ m}$$

3° LANCIO Riprendendo i risultati del 2° lancio, in questo caso basta tenere conto che cambiano (oltre all'angolo e alla velocità iniziale) il modulo e la direzione della forza del vento:

$$a_x = \frac{F}{m} = \frac{1,8 \text{ N}}{7,285 \text{ Kg}} = 0,247 \text{ m/s}^2$$

$$t = \frac{2V_y}{g} = \frac{2\sqrt{13\pi\alpha_3}\cdot r\, sen\varphi_3}{g} = 4,995 \text{ s}$$

La gittata quindi è:

$$x(t) = \sqrt{13\pi\alpha_3}\cdot r\cdot\cos\varphi_3\cdot t + \frac{1}{2} a_x t^2 = 87.03 \text{ m}$$

Stando ai nostri risultati l'atleta si classificherà al 1° posto.

Dobbiamo ora calcolare la forza centripeta. Essa sarà data da:

$\vec{F}_c = m\vec{a}_c$ dove $\vec{a}_c$ è l'accelerazione centripeta.

Questa si ottiene, ad esempio:

$a_c = \frac{V_T^2}{r}$ dove V_T è la velocità tangenziale.

Dato che il moto è circolare uniformemente accelerato avremo che

$$\theta = \frac{1}{2}\alpha t^2 \Longrightarrow t = \pm\sqrt{\frac{2\theta}{\alpha}} \quad e \quad \omega_f = \alpha t = \alpha\sqrt{\frac{2\theta}{\alpha}} = \sqrt{2\theta\alpha}$$

quindi $V_T = \omega_f \cdot r = \sqrt{2\theta\alpha}\cdot r$ e, alla fine

$$F_c = m a_c = m\frac{V_T^2}{r} = \frac{m\, 2\theta\alpha \cdot r^{\cancel{2}}}{\cancel{r}} = m r 2\theta\alpha$$

a) 1° lancio dopo 2 giri completi: $\theta = 4\pi$ $\alpha_1 = 13 \text{ rad/s}^2$

$$F_{c1} = m r 8\pi\alpha_1 = 2891,94 \text{ N}$$

b) 2° lancio dopo 1 giro completo: $\theta = 2\pi$ $\alpha_2 = 14 \ rad/s^2$ 8

$F_{c_2} = mr4\pi\alpha_2 = 1557,20 \ N$

c) 3° lancio al momento del rilascio: $\theta = \frac{13}{2}\pi$ $\alpha_3 = 15 \ rad/s^2$

$F_{c_3} = mr13\pi\alpha_3 = 5922,38 \ N$ ■