FS110 Fisica 1 - CdL in Matematica

Tutorato 3

Docente: Paola Gallo;
Tutor: Matteo Romoli e Davide Zaccaria.

22 Marzo 2023

Esercizio 1

Un punto materiale si muove di moto armonico con $T = 4.4$ s e all'istante $t = 0$ si trova nella posizione $x(t = 0) = 0.28$ m con velocità $v(t = 0) = v_0 = -2.5$ m/s. Calcolare velocità e accelerazione massime.

Esercizio 2

Un blocco di massa 2 kg scivola su un piano inclinato che forma un angolo di 30° con l'orizzontale. Il coefficiente di attrito tra il blocco e la superficie è $\frac{\sqrt{3}}{2}$. Trovare

1) Quale forza bisogna applicare perché il blocco scivoli verso il basso senza alcuna accelerazione.
2) Quale forza bisogna applicare affinchè il blocco scivoli verso l'alto senza alcuna accelerazione.

Esercizio 3

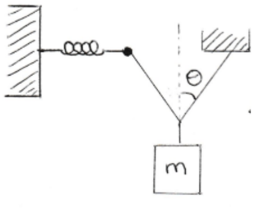
Due corpi di massa $m_1 = 10$ kg e $m_2 = 15$ kg giacciono in quiete su un piano orizzontale e sono legati da una fune ideale lunga $d = 50$ cm. Al corpo 2, ossia quello più pesante, viene applicata una forza $F = 50$ N nella direzione parallela al piano su cui giacciono e con verso che si oppone alla tensione causata dalla presenza della fune.

Il sistema composto dai due corpi si muove insieme sul piano orizzontale.

Le due masse si muovono sul piano con coefficienti di attrito differenti che sono, rispettivamente, $\mu_1 = 0,1$ e $\mu_2 = 0,2$.

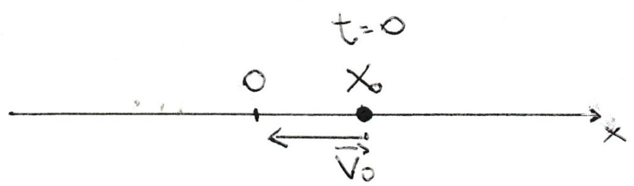
1) Calcolare l'accelerazione del sistema dei due corpi e la tensione della fune.
2) Cosa succede se al posto della fune si trova una molla di costante elastica $k = 500\frac{N}{m}$?

Esercizio 4



La massa $m = 1,6$ kg è sospesa come in figura. Nota la costante elastica $k = 200\frac{N}{m}$, determinare l'allungamento Δx in condizioni di equilibrio

1 UN PUNTO MATERIALE SI MUOVE DI MOTO ARMONICO CON $T = 4,4\ s$ E ALL' ISTANTE $t=0$ SI TROVA NELLA POSIZIONE $x(t=0) = 0,28\ m$ CON VELOCITÀ $V(t=0) = V_0 = -2,5\ m/s$. CALCOLARE VELOCITÀ E ACCELERAZIONE MASSIME.



$x_0 = 0,28\ m$
$V_0 = -2,5\ m/s$
$T = 4,4\ s$

Nel moto armonico, lo spazio percorso è regolato dalla legge:

$$x(t) = A\,\mathrm{sen}(\omega t + \varphi)$$

dove A è l'ampiezza dell'oscillazione, ω è la velocità angolare, e φ è la FASE, ovvero la posizione angolare in $t=0$ o anche lo shift angolare rispetto all'origine.

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = 1,428\ s^{-1}$$

$$\begin{cases} x(0) = A\,\mathrm{sen}(\varphi) \\ V(0) = \left.\dfrac{dx(t)}{dt}\right|_{t=0} = \left.A\omega\cos(\omega t + \varphi)\right|_{t=0} \end{cases}$$

$$= A\omega\cos(\varphi)$$

Facciamo il rapporto fra x_0 e V_0 per calcolare la fase:

$$\frac{x_0}{V_0} = \frac{x(0)}{V(0)} = \frac{A\,\mathrm{sen}(\varphi)}{A\omega\cos(\varphi)} = \frac{1}{\omega}\tan\varphi \Rightarrow \varphi = \arctan\left(\omega\frac{x_0}{V_0}\right) =$$

$$= \arctan\left(1,428\ s^{-1}\cdot\frac{0,28\ m}{-2,5\ m/s}\right) = -0,1586\ \mathrm{rad}$$

Ora troviamo A:

$$x_0 = A\,\mathrm{sen}(\varphi) \Rightarrow A = \frac{x_0}{\mathrm{sen}(\varphi)} = \frac{0,28\ m}{\mathrm{sen}(\varphi)} = -1,773\ m$$

La velocità massima è data da:

$$V_{MAX} = MAX[V(t)] = MAX[A\omega\cos\underbrace{(\omega t + \varphi)}_{\pm 1}] = \pm A\omega = \pm 1,773\ m\,(1,428\ s^{-1}) =$$

$= \pm 2{,}53$ m/s

L'accelerazione massima invece è data da:

$$a_{MAX} = MAX\left[\frac{dv(t)}{dt}\right] = MAX\left[\frac{d}{dt}(A\omega\cos(\omega t+\varphi))\right] = MAX\left[A\omega^2 \underbrace{sen(\omega t+\varphi)}_{\pm 1}\right] =$$

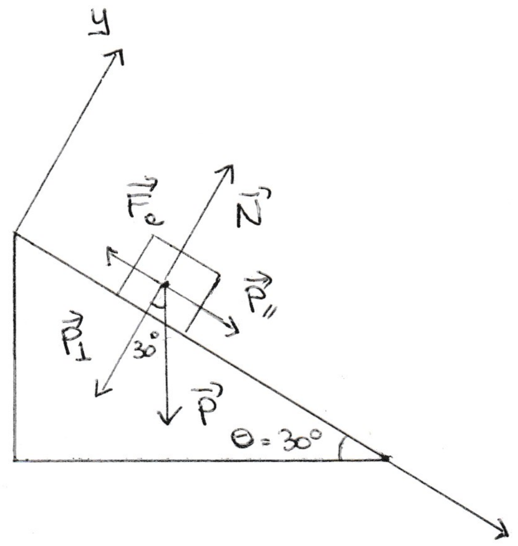
$$= \mp A\omega^2 = \pm(1{,}773\ m)\cdot(1{,}422\ s^{-1})^2 = \pm 3{,}62\ m/s^2$$

FORZE, ATTRITI, PIANO INCLINATO

$\boxed{2}$ UN BLOCCO DI MASSA 2 Kg SCIVOLA SU UN PIANO INCLINATO CHE FORMA UN ANGOLO DI 30° CON L'ORIZZONTALE. IL COEFFICIENTE DI ATTRITO FRA IL BLOCCO E LA SUPERFICIE È $\sqrt{3}/2$. TROVARE:

I) QUALE FORZA BISOGNA APPLICARE PERCHÉ IL BLOCCO SCIVOLI VERSO IL BASSO SENZA ALCUNA ACCELERAZIONE;

II) QUALE FORZA BISOGNA APPLICARE PERCHÉ IL BLOCCO SCIVOLI VERSO L'ALTO SENZA ALCUNA ACCELERAZIONE



$\vec{N}$ = reazione del piano

$\vec{P}$ = forza peso

$\vec{P_{//}}$ comp. parallela (al piano) di $\vec{P}$

$\vec{P_\perp}$ comp. perpendicolare (al piano) di $\vec{P}$

$\vec{F_a}$ = Forza d'attrito

$\vec{P} = m\vec{g}$ $\quad |\vec{P_{//}}| = mg\,sen\theta = \frac{mg}{2}$

$|\vec{P_\perp}| = mg\cos\theta = \frac{\sqrt{3}}{2}mg$

$\vec{F_a} = \mu \cdot \vec{N}$ $\quad \mu$ = coeff. d'attrito. In questo caso non facciamo distinzione tra coeff. d'attrito statico μ_s e dinamico μ_s.

$|\vec{N}| = |\vec{P_\perp}| = \frac{\sqrt{3}}{2}mg$ ma è diretta nel verso opposto.

$\vec{F_a}$ è diretta sempre in modo contrario al moto

Dividiamo le equazioni della dinamica nelle direzioni degli assi $\hat{x}$ e $\hat{y}$:

I) $x: \; ma_x = -F_a + P_{\parallel} + F_1 = -F_a + \frac{mg}{2} + F_1 = 0$ Il blocco scende senza accelerare.

$y: \; ma_y = N - P_{\perp} = N - \frac{\sqrt{3}}{2}mg \longrightarrow$ ma $a_y = 0$

$\Rightarrow N = \frac{\sqrt{3}}{2}mg$ quindi $F_a = \mu N = \frac{\sqrt{3}}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}mg = \frac{3}{4}mg$

quindi $-F_a + \frac{mg}{2} + F_1 = 0 \Rightarrow F_1 = F_a - \frac{mg}{2} = \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2}\right)mg = \frac{1}{4}mg$

Bisogna applicare una forza $\vec{F_1} = \frac{1}{4} \cdot 2\,Kg \cdot 9{,}8\,\frac{m}{s^2} = 4{,}9\,N$ diretta lungo $\hat{x}$

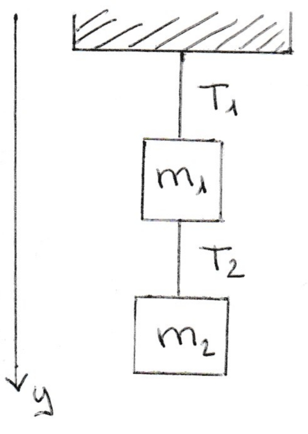
II) $x: \; ma_x = F_a + P_{\parallel} - F_2 = 0 \Rightarrow F_2 = F_a + P_{\parallel} = \frac{3}{4}mg + \frac{mg}{2} = \frac{5}{4}mg$

$y: \; ma_y = N - P_{\perp} = 0$

Bisogna applicare una forza $\vec{F_2} = -24{,}5\,N$ diretta lungo $-\hat{x}$ ■

---

3 DUE MASSE m_1 e m_2 SONO APPESE COME IN FIGURA. CALCOLARE I VALORI DELLE TENSIONI T_1 e T_2. SI TAGLIA IL FILO 1. DURANTE LA CADUTA IL FILO 2 É TESO?



Usiamo il 2° principio della dinamica per le 2 masse:

1: $T_2 - T_1 + m_1 g = 0$

2: $-T_2 + m_2 g = 0$

Dalla 2ª equazione si ricava che $T_2 = m_2 g$. Sostituendola nella 1ª equazione:

$-T_1 + m_2 g + m_1 g = 0 \Rightarrow T_1 = m_2 g + m_1 g$.

Se il filo 1 è tagliato i corpi sono in caduta libera con accelerazione $a_1 = a_2 = g$. Quindi le equazioni precedenti diventano:

1: $T + m_1 g = m_1 g$
2: $-T + m_2 g = m_2 g$ $\Rightarrow T = 0$

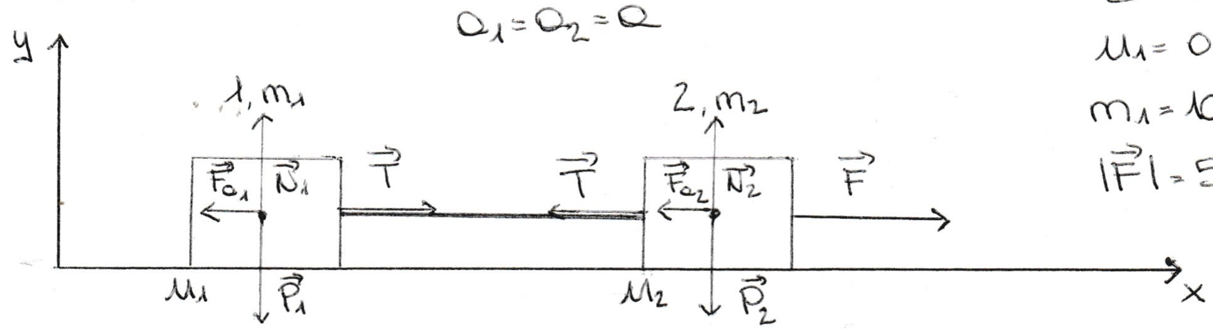
Non c'é tensione per cui il filo 2 non é teso. ■

ATTRITI, FUNI, MOLLE - 25/03/2021

1 DUE CORPI DI MASSA $m_1 = 10$ kg e $m_2 = 15$ kg SONO LEGATI AD UNA FUNE LUNGA $d = 50$ cm. AL CORPO 2 VIENE APPLICATA UNA FORZA $F = 50$ N E L'INSIEME SI MUOVE STRISCIANDO SOPRA UN PIANO ORIZZONTALE. I RISPETTIVI COEFFICIENTI D'ATTRITO SONO $\mu_1 = 0,1$ e $\mu_2 = 0,2$. CALCOLARE L'ACCELERAZIONE DEL SISTEMA E LA TENSIONE DELLA FUNE.

$d = 0,5$ m
$\mu_1 = 0,1 \quad \mu_2 = 0,2$
$m_1 = 10$ kg $\quad m_2 = 15$ kg
$|\vec{F}| = 50$ N

$a_1 = a_2 = a$



Scriviamo il 2° principio della dinamica per le 2 masse lungo le direzioni degli assi:

$$1: \begin{cases} x: m_1 a = T - F_{a1} \\ y: N_1 - P_1 = 0 \end{cases} \qquad 2: \begin{cases} x: m_2 a = F - T - F_{a2} \\ y: N_2 - P_2 = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow N_1 = P_1 = m_1 g \qquad \Rightarrow N_2 = P_2 = m_2 g$

quindi $F_{a1} = \mu_1 N_1 = \mu_1 m_1 g \qquad$ quindi $F_{a2} = \mu_2 N_2 = \mu_2 m_2 g$

Mettiamo a sistema le prime equazioni per le 2 masse:

$1: \; m_1 a = T - \mu_1 m_1 g$

$2: \; m_2 a = F - T - \mu_2 m_2 g$

Risolviamo il sistema: Dalla 1ª:
$$T = m_1 a + \mu_1 m_1 g$$
e sostituiamolo nella 2ª:

$$m_2 a = F - m_1 a - \mu_1 m_1 g - \mu_2 m_2 g \Rightarrow a(m_1 + m_2) = F - g(\mu_1 m_1 + \mu_2 m_2)$$

$$\Rightarrow a = \frac{F - g(\mu_1 m_1 + \mu_2 m_2)}{m_1 + m_2} = \frac{50\,N - 9,8\,m/s^2(0,1 \cdot 10\,kg + 0,2 \cdot 15\,kg)}{(10+15)\,kg} =$$

$$= \frac{50\,N - 39,2\,N}{25\,kg} = 0,432\ m/s^2$$

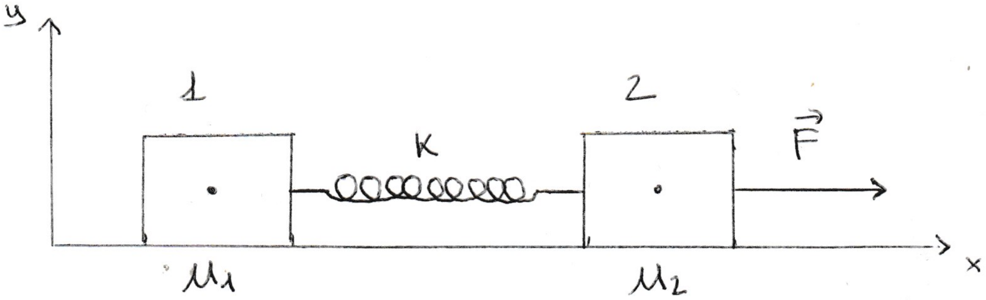
Quindi $T = m_1 a + \mu_1 m_1 g = m_1(a + \mu_1 g) = 10\,kg\left(0,432\,\frac{m}{s^2} + 0,1 \cdot 9,8\,\frac{m}{s^2}\right) =$

$= 14,12$ N

Attenzione! Il moto avviene se e solo se:

$$F > F_{a_{TOT}} = F_{a1} + F_{a2} = g(\mu_1 m_1 + \mu_2 m_2) = 39{,}2\ N \Rightarrow F > 39{,}2\ N \ \blacksquare$$

1.1 COSA ACCADE SE AL POSTO DELLA CORDA SI TROVA UNA MOLLA DI COSTANTE ELASTICA $K = 500\ \frac{N}{m}$?



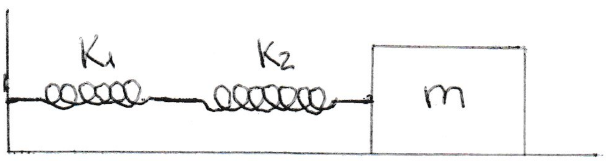
Le equazioni del moto sono le stesse, ma con $T = K\Delta x$

$$\begin{cases} 1: m_1 a = K\Delta x - \mu_1 m_1 g \\ 2: m_2 a = F - K\Delta x - \mu_2 m_2 g \end{cases} \Rightarrow K\Delta x = 14{,}12\ N$$

quindi $\Delta x = \dfrac{14{,}12\ N}{500\ N/m} = 0{,}03\ m \ \blacksquare$

---

2 UN PUNTO MATERIALE DI MASSA $m = 0{,}4\ Kg$ È ATTACCATO A 2 MOLLE CON COSTANTI ELASTICHE $K_1 = 20\ N/m$ e $K_2 = 30\ N/m$. CALCOLARE IL PERIODO DELLE OSCILLAZIONI ARMONICHE DEL PUNTO (in figura è mostrato il sistema a riposo).



$m = 0{,}4\ Kg$

$K_1 = 20\ \frac{N}{m}$ $\quad K_2 = 30\ \frac{N}{m}$

la massa m è collegata direttamente solo alla molla K_2. Indichiamo con x_1 l'allungamento della molla K_1 e x_2 l'allungamento della molla K_2. Abbiamo che:

$$ma = -K_2(x_2 - x_1)$$

e per la molla K_1:

$$K_2(x_2 - x_1) - K_1 x_1 = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{K_2 x_2}{K_1 + K_2}$$

e sostituiamola nella 1ª equazione:

$$ma = -K_2 x_2 + \frac{K_2^2 x_2}{K_1 + K_2} \Rightarrow ma = x_2\left(\frac{K_2^2}{K_1 + K_2} - K_2\right) =$$

$$= x_2\left(\frac{K_2^2 - K_2 K_1 - K_2^2}{K_1 + K_2}\right) = -x_2\left(\frac{K_2 K_1}{K_1 + K_2}\right)$$

questo rapporto è il K_{TOT} che ci permette di trattare le 2 molle

come fossero un'unica molla.
Quindi:

$$ma = -x_2 \frac{K_1 K_2}{K_1 + K_2} = -x_2 K_{TOT}$$

Ora possiamo trovare il periodo dell'oscillazione, che è:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{K_{TOT}}} = 2\pi \sqrt{\frac{m(K_1+K_2)}{K_1 K_2}} = 1{,}15\ s \ \blacksquare$$

PICCOLO RECAP. OSCILLATORE ARMONICO:

Oggetto agganciato a una molla, libero di scivolare su un piano privo di attrito e avente massa m. La forza che fa oscillare il corpo è:

$\vec{F} = -K\vec{x}$ quindi applicando il 2° principio della dinamica, abbiamo $\vec{F} = m\vec{a}$, quindi:

$m\vec{a} = -K\vec{x}$. Eliminiamo la notazione vettoriale occupandoci solo dei moduli:

$$ma = -Kx \Rightarrow m\frac{d^2x}{dt^2} = -Kx \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{K}{m}x = 0 \rightarrow \ddot{x} + \frac{K}{m}x = 0$$

EQUAZIONE DIFFERENZIALE DELL'OSCILLATORE ARMONICO SEMPLICE

$\ddot{x} = -\frac{K}{m}x$ la soluzione è una funzione che, a meno della costante ha la derivata seconda uguale alla funzione iniziale ma cambiata di segno.

(NB: l'equazione è di tipo differenziale lineare del 2° ordine a coefficienti costanti. Può essere risolta in modo rigoroso, ma qui ne stiamo dando una soluzione 'empirica').

Proviamo la soluzione $x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$

$$\frac{d^2 A\cos(\omega t+\varphi)}{dt^2} = \frac{d[-A\omega\,\mathrm{sen}(\omega t+\varphi)]}{dt} = -A\omega^2\cos(\omega t+\varphi)$$

sostituiamo la nell'equazione differenziale

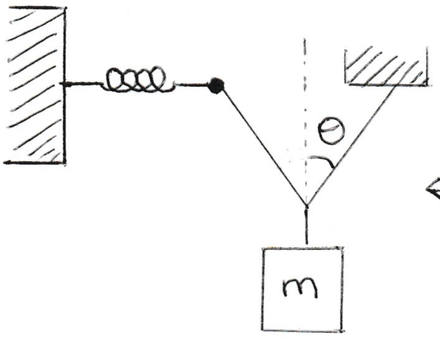
$$-A\omega^2\cos(\omega t+\varphi) = -\frac{K}{m}A\cos(\omega t+\varphi)$$

$\Rightarrow \omega^2 = \frac{K}{m}$ quindi $\omega = \pm\sqrt{\frac{K}{m}}$ È LA PULSAZIONE DELL'OSCILLATORE ARMONICO

Inoltre $\omega = \frac{2\pi}{T} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}$ È IL PERIODO DELL'OSCILLATORE ARMONICO SEMPLICE

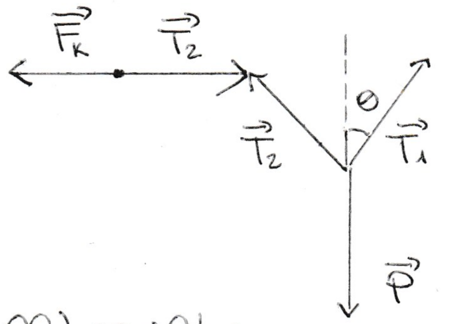
Notiamo che il periodo è indipendente dall'ampiezza dell'oscillazione A.

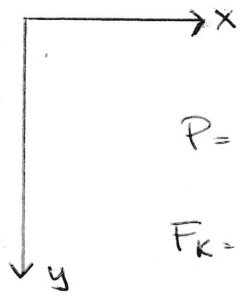
3 LA MASSA $m = 1,6$ kg È SOSPESA COME IN FIGURA. (4)
NOTA LA COSTANTE ELASTICA $K = 200$ N/m, DETERMINARE L'ALLUNGAMENTO Δx IN CONDIZIONI DI EQUILIBRIO.



$\theta = 40°$

Forze in gioco:





$P = mg$ forza peso

$F_K = -Kx$ forza di richiamo

La situazione all'equilibrio è la seguente:

$$x: \begin{cases} T_2 - F_K = 0 \\ T_1 \operatorname{sen}\theta - T_2 \operatorname{sen}\theta = 0 \end{cases}$$

$$y: \begin{cases} P - T_1\cos\theta - T_2\cos\theta = 0 \\ \Rightarrow P = \cos\theta(T_1 + T_2) \end{cases}$$

$T_2 = F_K = -Kx \Rightarrow x = -\frac{T_2}{x}$ → quindi dobbiamo trovare T_2.

$T_1 \operatorname{sen}\theta = T_2 \operatorname{sen}\theta \Rightarrow T_1 = T_2 = T$

quindi $P = \cos\theta(T_1 + T_2) = \cos\theta \cdot 2T \Rightarrow T = \frac{P}{2\cos\theta} = \frac{mg}{2\cos\theta} = 10,23$ N

Allora $x = -\frac{T}{K} = -\frac{10,23 \text{ N}}{200 \text{ N/m}} = -0,05$ m ■