FS110 Fisica 1 - CdL in Matematica

Tutorato 2

Docente: Paola Gallo;
Tutor: Matteo Romoli e Davide Zaccaria.

15 Marzo 2023

Esercizio 1

Un/a ragazzo/a vuole tirare una palla attraverso una casa. La palla dovrà passare da due finestre: una sulla facciata posta di fronte al/la ragazzo/a e l'altra posta sul retro. La casa è profonda $6\,m$. La prima finestra si trova a $5\,m$ dal/la ragazzo/a e a $5\,m$ di altezza dal suolo. La finestra sul retro è posta $2\,m$ più in alto rispetto alla prima finestra. Calcolare la velocità e l'angolo di lancio per ottenere un colpo perfetto.

Esercizio 2

Un'automobile percorre una traiettoria circolare di raggio $R = 1\,m$ con velocità costante in modulo. Determinare la velocità dell'auto perché la frequenza sia $2.5\,Hz$ e l'accelerazione centripeta.

Scrivere la legge oraria che descrivere l'angolo di rotazione dell'automobile in funzione del tempo.

Esercizio 3

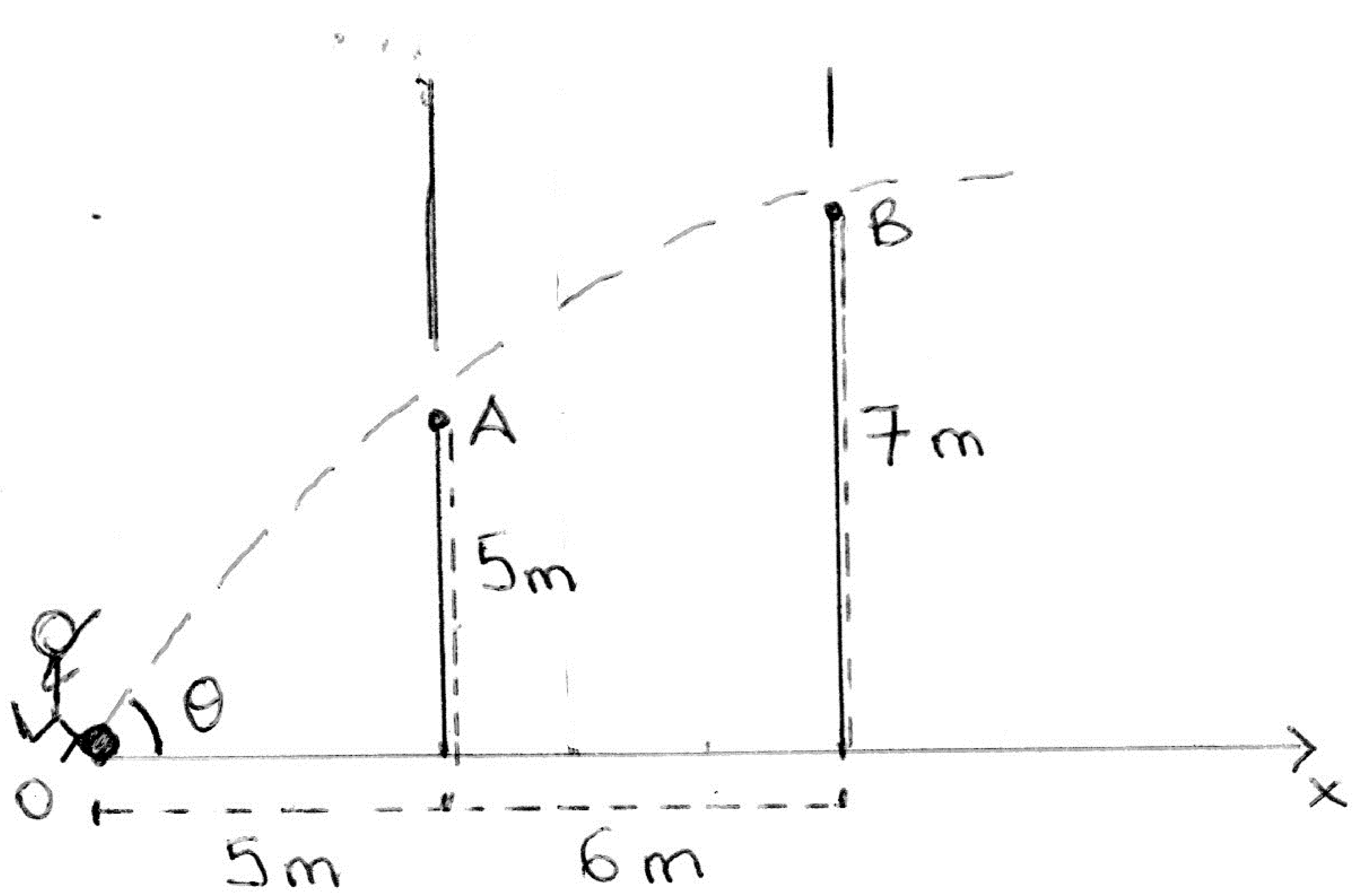
Un cannone spara un proiettile con velocità iniziale avente componenti $v_{0,x} = \frac{4}{5}v_0$ e $v_{0,y} = \frac{3}{5}v_0$. Il bersaglio si trova alla distanza $D = 5800\,m$ e $150\,m$ più in basso rispetto al cannone. Determinare il modulo di v_0, l'angolo di tiro, l'istante in cui il proiettile colpisce il bersaglio e la velocità del proiettile in quell'istante.

Esercizio 4

Un punto materiale inizialmente in quiete descrive una traiettoria circolare di raggio $r = 20\,cm$ con accelerazione angolare $\alpha = 4\,\frac{rad}{s^2}$. Calcolare all'istante $t = 5\,s$:

- L'accelerazione centripeta
- L'angolo di rotazione
- L'accelerazione tangenziale
- L'accelerazione totale
- La velocità angolare.

1. UNA RAGAZZO/A VUOLE TIRARE UNA PALLA ATTRAVERSO UNA CASA. LA PALLA DOVRÀ PASSARE DA DUE FINESTRE: UNA SULLA FACCIATA POSTA DI FRONTE ALLA RAGAZZO/A E L'ALTRA POSTA SUL RETRO. LA CASA È PROFONDA 6 m. LA PRIMA FINESTRA SI TROVA A 5 m DAL/LA RAGAZZO/A E A 5 m DI ALTEZZA DAL SUOLO. LA FINESTRA SUL RETRO È POSTA 2 m PIÙ IN ALTO RISPETTO ALLA PRIMA FINESTRA. CALCOLARE LA VELOCITÀ E L'ANGOLO DI LANCIO PER OTTENERE UN COLPO PERFETTO.



Le coordinate dei punti A e B, in metri, sono:

$A=(5,5)$; $B=(11,7)$

Ye moto è parabolico. La traiettoria può essere scomposta in un moto rettilineo uniforme lungo x e uno unif. accelerato lungo y.

$$\begin{cases} x = V_0(\cos\theta)\,t \\ y = V_0(\operatorname{sen}\theta)t - \frac{1}{2}gt^2 \end{cases}$$

Ricaviamo t dalla 1ª equazione e sostituiamolo nella 2ª.

$$t = \frac{x}{V_0\cos\theta}$$

$$\Rightarrow y = \frac{V_0 \operatorname{sen}\theta \cdot x}{V_0\cos\theta} - \frac{1}{2}g\frac{x^2}{V_0^2\cos^2\theta} \Rightarrow y = x\underbrace{\tan\theta}_{b} - \underbrace{\frac{1}{2}\frac{g}{V_0^2\cos^2\theta}}_{a}x^2$$

$y = -ax^2 + bx$ è l'equazione di una parabola passante per l'origine.

Dobbiamo imporre che passi per $(0,0)$; A ; B (solo parabola passa per 3 punti).

$$\begin{cases} y_A = -ax_A^2 + bx \Rightarrow 5 = -25a + 5b \\ y_B = -ax_B^2 + bx_B \Rightarrow 7 = -121a + 11b \end{cases} \Rightarrow \quad a = \frac{5(b-1)}{25} = \frac{b-1}{5}$$

$$b = \frac{7}{11} + \frac{121\,(b-1)}{11\cdot 5} = \frac{7}{11} + \frac{11}{5}(b-1)$$

$$\Rightarrow b\left(1-\frac{11}{5}\right) = \frac{7}{11} - \frac{11}{5} \Rightarrow b\left(-\frac{6}{5}\right) = \frac{-86}{55} \Rightarrow b = \frac{43}{11\cdot 3} = \frac{43}{33} \simeq 1{,}30$$

$$a \simeq 0{,}06$$

Quindi: $b \simeq 1{,}30 = \tan\theta \Rightarrow \theta \simeq 52{,}5°$

$$\frac{1}{2}\frac{g}{V_0^2\cos^2\theta} = a \Longrightarrow V_0 = \sqrt{\frac{g}{2a\cos^2\theta}} \simeq 14{,}8\ \frac{m}{s}$$ ■

MOTO CIRCOLARE

3 UN'AUTOMOBILE PERCORRE UNA TRAIETTORIA CIRCOLARE DI RAGGIO $R = 1\ m$ CON VELOCITÀ COSTANTE IN MODULO.
DETERMINARE LA VELOCITÀ DELL'AUTO PERCHÈ LA FREQUENZA SIA 2,5 Hz e L'ACCELERAZIONE CENTRIPETA.

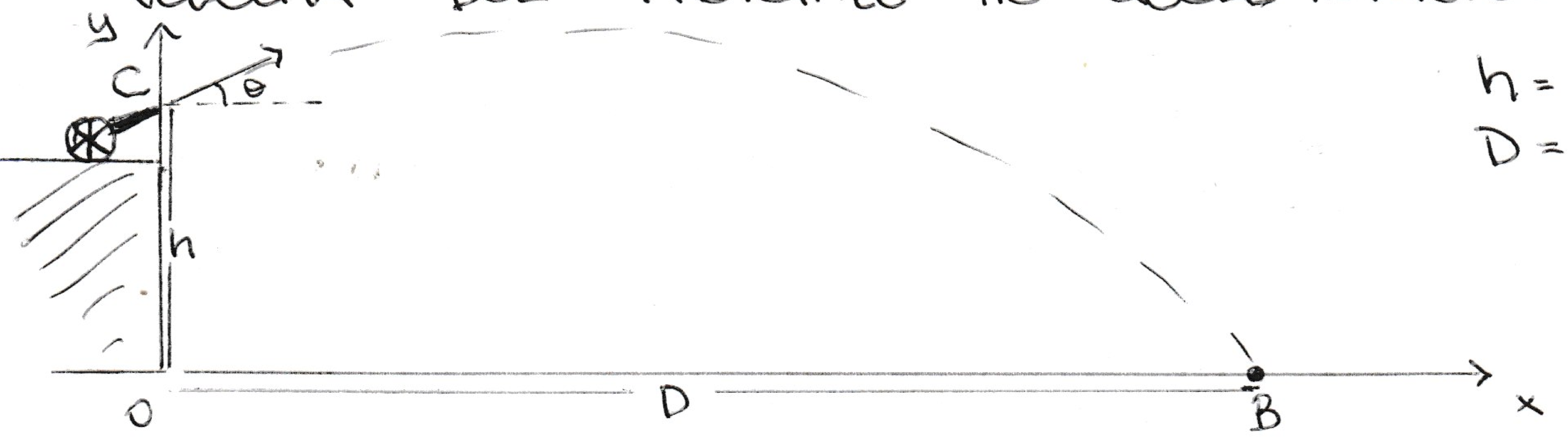
In questo caso abbiamo un moto circolare uniforme. Quindi vale:

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{2\pi r}{T} = 2\pi r \nu$$ con $\nu = \frac{1}{T}$ frequenza.

La direzione della velocità cambia in ogni istante, per cui vi è un'accelerazione rivolta sempre verso il centro della traiettoria, l'accelerazione centripeta, con modulo:

$a_c = \frac{v^2}{r}$ quindi $v = 2\pi \cdot 1\,m \cdot 2{,}5\,\frac{1}{s} = 15{,}7\,\frac{m}{s}$; $a_c = 246{,}5\,\frac{m}{s^2}$ $\blacksquare$

1 UN CANNONE SPARA UN PROIETTILE CON VELOCITÀ INIZIALE AVENTE COMPONENTI $V_{ox} = \frac{4}{5} V_0$ e $V_{oy} = \frac{3}{5} V_0$. IL BERSAGLIO SI TROVA ALLA DISTANZA $D = 5800$ m e 150 m PIÚ IN BASSO RISPETTO AL CANNONE.
DETERMINARE: IL MODULO DI V_0, L'ANGOLO DI TIRO, L'ISTANTE IN CUI IL PROIETTILE COLPISCE IL BERSAGLIO E LA VELOCITÀ DEL PROIETTILE IN QUELL'ISTANTE.



$h = 150$ m
$D = 5800$ m

Abbiamo scelto l'origine in O, alla stessa quota del bersaglio B.

Il proiettile invece parte dal punto C.
Per trovare l'angolo basta ricordarsi che:

$V_{ox} = \cos\theta \cdot V_0$
$V_{oy} = \sin\theta \cdot V_0$ per cui $\cos\theta = \frac{4}{5} \Rightarrow \theta = \arccos\frac{4}{5} = 36{,}9°$
$\sin\theta = \frac{3}{5}$

Le equazioni del moto sono:

$$\begin{cases} y(t) = y_0 + V_{oy} \cdot t + \frac{1}{2} a t^2 \\ x(t) = V_{ox} \cdot t \end{cases}$$

All'istante finale t_f diventano:

$$\begin{cases} y(t_f) = 0 = h + V_{oy} \cdot t_f - \frac{1}{2} g t_f^2 \\ x(t_f) = D = V_{ox} \cdot t_f \end{cases}$$

Risolviamo il sistema. Ricaviamo t_f dalla 2ª equazione:

$$t_f = \frac{D}{V_{ox}} = \frac{D}{\frac{4V_0}{5}} = \frac{5D}{4V_0} \quad ; \quad 0 = h + \frac{3}{5}\cancel{V_0} \cdot \frac{5}{4}\frac{D}{\cancel{V_0}} - \frac{1}{2} g \frac{25}{16}\frac{D^2}{V_0^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 0 = h + \frac{3D}{4} - g\frac{25}{32}\frac{D^2}{V_0^2} \Rightarrow -25gD^2 + V_0^2(24D + 32h) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow V_0^2 = \frac{25gD^2}{24D + 32h} \Rightarrow V_0 = \pm\sqrt{\frac{25 \cdot 9{,}8\, m/s^2 \cdot 5800^2\, m^2}{24 \cdot 5800\, m + 32 \cdot 150\, m}} = 239{,}2\ \frac{m}{s}$$

Abbiamo preso la soluz. +

$$\Rightarrow t_f = \frac{D}{V_{ox}} = \frac{5D}{4V_0} = \frac{5 \cdot 5800\, m}{4 \cdot 239{,}2\, m/s} = 30{,}3\ s$$

La velocità finale del proiettile sarà, in generale, composta da 2 componenti: V_{fx} e V_{fy}

Per quanto riguarda la componente x:

$$V_{0x} = V_{fx} = \frac{4}{5}V_0 = \frac{4}{5}\cdot 239,2\ \frac{m}{s} = 191,4\ \frac{m}{s}$$

Invece, per la componente y avremo:

$$V_{fy} = V_{0y} + at \Rightarrow V_{fy} = \frac{3}{5}V_0 - gt_f = \frac{3}{5}239,2\ \frac{m}{s} - 9,8\ \frac{m}{s^2}\cdot 30,3\ s =$$

$$= -153,4\ \frac{m}{s}$$

La velocità finale pertanto avrà modulo:

$$V_f = \sqrt{V_{fx}^2 + V_{fy}^2} = 245,3\ m/s$$

con inclinazione:

$$V_{fx} = V_f \cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \frac{V_{fx}}{V_f} = 0,78 \Rightarrow \alpha = 38,7^\circ$$ VERSO DESTRA RISPETTO ALLA VERTICALE. $\blacksquare$

3 UN PUNTO MATERIALE INIZIALMENTE IN QUIETE DESCRIVE UNA TRAIETTORIA CIRCOLARE DI RAGGIO $r = 20$ cm CON ACCELERAZIONE ANGOLARE $\alpha = 4\ rad/s^2$. CALCOLARE, ALL'ISTANTE $t = 5\ s$.

I) L'ACCELERAZIONE CENTRIPETA
II) L'ANGOLO DI ROTAZIONE
III) L'ACCELERAZIONE TANGENZIALE
IV) L'ACCELERAZIONE TOTALE
V) LA VELOCITA' ANGOLARE

$r = 0{,}2\ m$

$\alpha = 4\ \frac{rad}{s^2}$

$t = 5\ s$

Il moto in questione è un moto circolare uniformemente accelerato. La costante è l'accelerazione angolare α e il modulo dell'accelerazione tangenziale. L'accelerazione totale è data dalla somma vettoriale di accelerazione centripeta e tangenziale.

I) L'accelerazione centripeta è data da:
e V)
$a_c = \omega^2 r$ con ω velocità angolare, data da:

$$\omega = \omega_0 + \alpha t \Rightarrow \omega(5\ s) = 4\ \frac{rad}{s^2} \cdot 5\ s = 20\ rad/s$$

quindi $a_c = 20^2\ rad^2/s^2 \cdot 0{,}2\ m = 80\ m/s^2$

II) L'angolo di rotazione è analogo allo spazio percorso nel moto unif/mente accelerato:

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \Rightarrow \theta(5\ s) = \frac{1}{2} \cdot 4\ \frac{rad}{s} \cdot 25\ s^2 = \frac{100}{2}\ rad = 50\ rad$$

$50\ rad = 2864{,}79^\circ \longrightarrow$ circa 7,95 giri, ovvero $-15{,}21^\circ$ dell'ottavo giro.

III) L'accelerazione tangenziale ha il modulo dato semplicemente da:

$$a_T = \alpha \cdot r = 4\ \frac{rad}{s^2} \cdot 0{,}2\ m = 0{,}8\ \frac{m}{s^2}$$

IV $a_{tot} = \sqrt{a_c^2 + a_T^2} \Rightarrow a_{tot}(5\ s) = \sqrt{a_c^2(5) + a_T^2} = \sqrt{80^2\ \frac{m^2}{s^4} + 0{,}8^2\ \frac{m^2}{s^4}} \simeq 80\ \frac{m}{s^2}$

■