FS110 Fisica 1 - CdL in Matematica

Tutorato 10

Docente: Paola Gallo;
Tutor: Matteo Romoli e Davide Zaccaria.

17 Maggio 2023

Esercizio 1

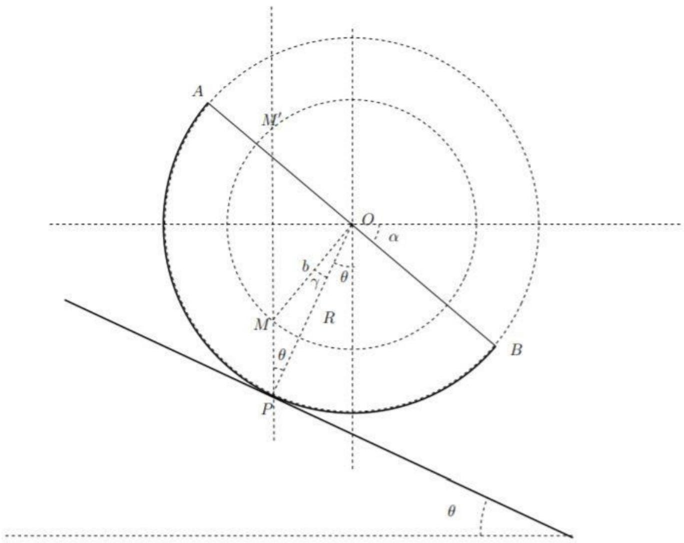
Un cilindro ruota senza strisciare su un piano inclinato di un angolo α. Calcolare l'accelerazione del suo centro di massa.

Esercizio 2

La metà di un cilindro omogeneo di raggio R, massa m e altezza h è appoggiato su un piano obliquo come in figura ed è libero di ruotare senza strisciare. Potete indicare con b la distanza del centro di massa dall'asse del cilindro.

1 - Calcolare l'inclinazione α del cilindro nella posizione di equilibrio in funzione di θ, e l'angolo massimo θ^* per il quale l'equilibrio è possibile (vedere figura).

2 - Se $\theta = 0$, partendo dalla posizione di equilibrio per quale velocità angolare iniziale minima il corpo si capovolge?



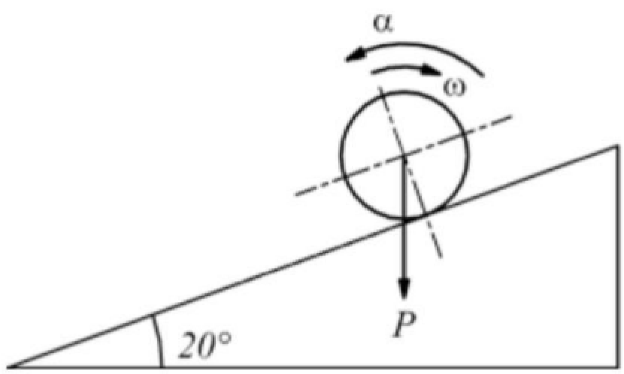
Esercizio 3

Un disco di massa 50 kg e raggio 180 cm ruota attorno al suo asse. Sull'orlo del disco viene applicata una forza $F = 19.6$ N. Il disco parte da fermo. Calcola:

a) La sua accelerazione angolare
b) L'angolo descritto dopo 5 sec.
c) Il momento della quantità di moto
d) La sua energia cinetica dopo 5 sec.

Esercizio 4

Un cilindro di raggio $r = 50$ cm e di peso $P = 40$ N si muove in un dato istante alla velocità $v = 10$ m/s su un piano inclinato di 20°. Quanto tempo impiega a raggiungere il punto più alto della sua traiettoria?



Soluzione Problema 1

Poniamo l'origine degli assi nello spigolo dove il piano inclinato si congiunge col piano orizzontale. Il centro di massa del cilindro è individuato da un vettore $\vec{r}$. Il cilindro ruota senza strisciare con una velocità angolare $\omega(t)$ che varia nel tempo. L'energia meccanica totale del cilindro è data da:

$$E = \frac{1}{2}M\dot{r}^2 + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 - Mgr\sin\alpha$$

La condizione di rotolamento puro è, (sia R il raggio del cilindro) che $\dot{\theta}R = \dot{r}$. Quindi si ha che:

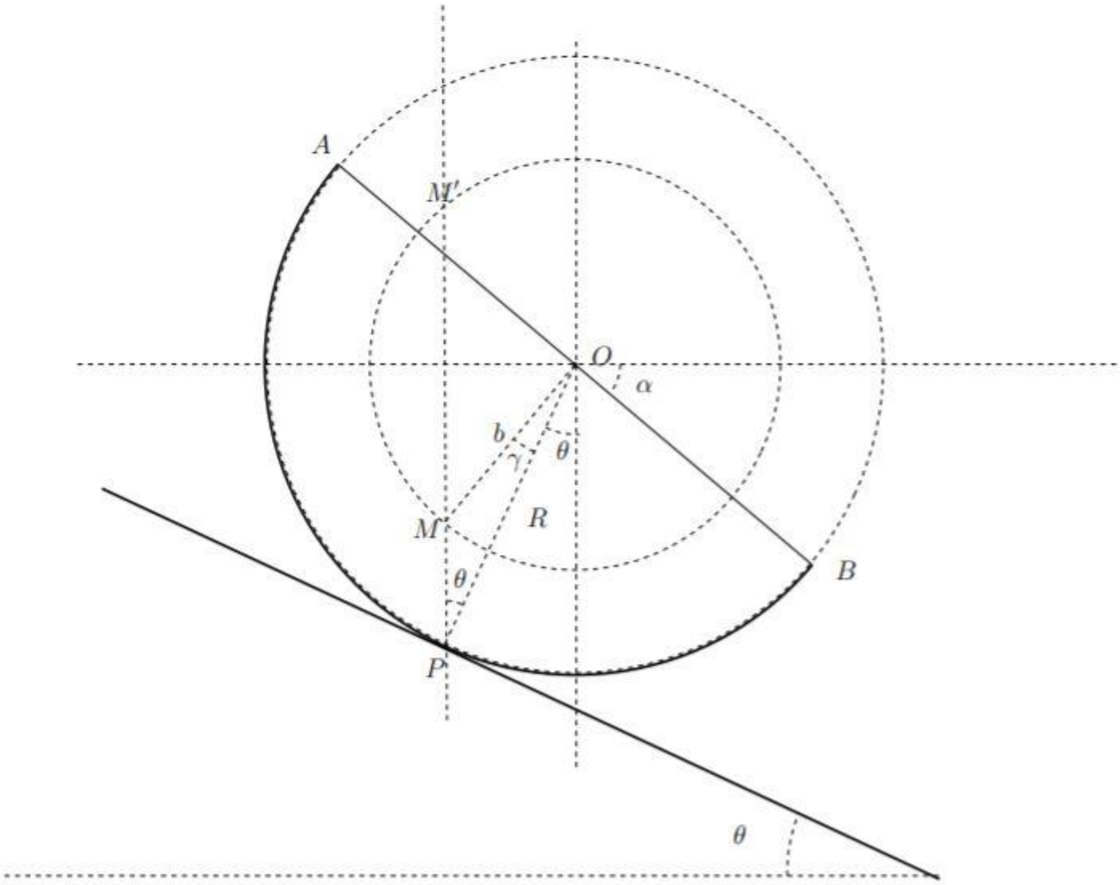
$$E = \frac{1}{2}M\dot{r}^2 + \frac{1}{2}I\frac{\dot{r}^2}{R^2} - Mgr\sin\alpha$$

E derivando rispetto al tempo il risultato deve essere nullo per la conservazione dell'energia meccanica totale:

$$\dot{E} = M\ddot{r}\dot{r} + I\frac{\ddot{r}\dot{r}}{R^2} - Mg\dot{r}\sin\alpha = 0$$

$$\Rightarrow\ \ddot{r} = \frac{Mg\sin\alpha}{M + \frac{I}{R^2}}$$

Soluzione Problema 2



Prendiamo in esame il triangolo MPO. Dal teorema dei seni viene la seguente relazione:

$$\frac{b}{\sin\theta} = \frac{R}{\sin(\pi - \gamma - \theta)} = \frac{R}{\sin\alpha}$$

Questo dato che $\gamma = \alpha - \theta$. Quindi si ha:

$$R\sin\theta = b\sin\alpha$$

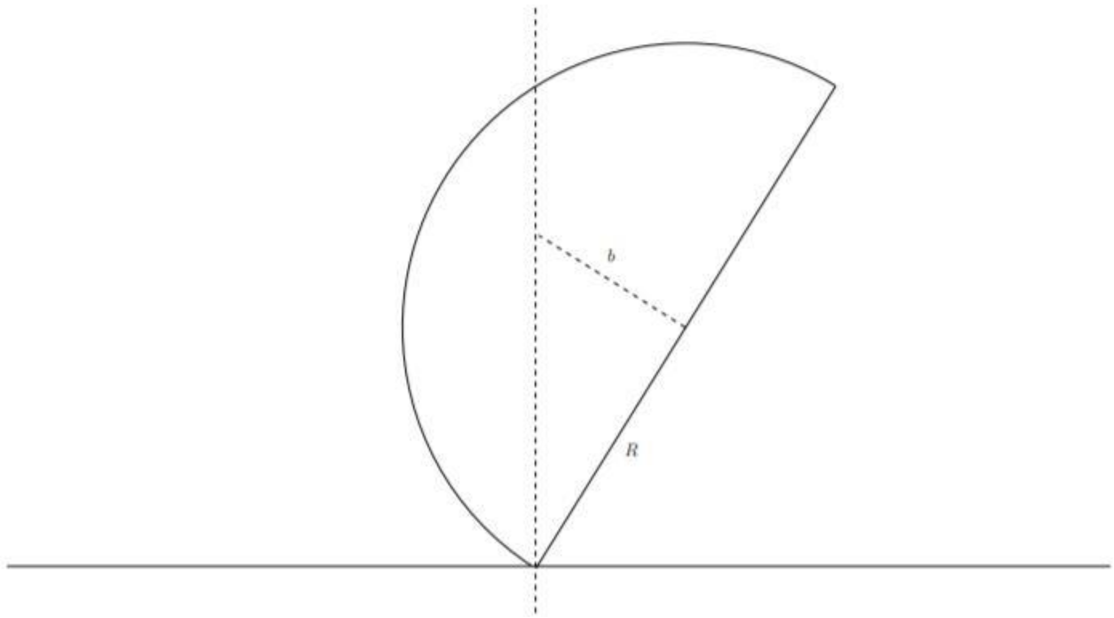
Questo, determina l'angolo α in funzione di θ. Quando avremo soluzioni? Solo se:

$$\sin\theta \leq \frac{b}{R}$$

Per cui, il massimo valore possibile è $\theta^* = \arcsin\frac{b}{R}$. Eplicitando α si ottiene:

$$\alpha = \arcsin\left(\frac{R}{b}\sin\theta\right)$$

In alternativa, guardando la figura, si vede che il valore massimo di α corrisponde a $\alpha + \theta = \frac{\pi}{2}$ (la retta $\overline{MM'}$ diventa tangente alla circonferenza di raggio b). Questa condizione corrisponde a $\sin\theta^* = \frac{b}{R}$. Per piccoli spostamenti rispetto a M del centro di massa la forza di gravità agisce come forza di richiamo, pertanto si tratta di equilibrio stabile. Al contrario, una situazione in cui il centro di massa si trova in M' è di tipo instabile, come si vede nella figura sottostante.



Domanda 2

Affinché si capovolga, il corpo dovrà superare l'altezza massima del centro di massa, ovvero la condizione riportata dalla figura soprastante. L'altezza del centro di massa rispetto al terreno, in questo caso, è:

$$h_f = \sqrt{b^2 + R^2}$$

Imponendo la conservazione dell'energia si ha:

$$\frac{1}{2} I_P \omega_0^2 + mg(R - b) = mg\sqrt{b^2 + R^2}$$

Dove I_P è il momento di inerzia del mezzo cilindro rispetto al punto di contatto nella configurazione iniziale. Ricavando la velocità angolare si ottiene:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2mg}{I_P}(\sqrt{b^2 + R^2} - R - b)}$$

Proviamo a calcolare I_P. Il momento di inerzia di un cilindro intero rispetto al suo asse vale:

$$I_C = \frac{1}{2} M_C R^2$$

Mentre quello di metà cilindro rispetto allo stesso asse sarà:

$$I_O = \frac{1}{2} m R^2$$

Dove naturalmente vale che $m = \frac{M_C}{2}$. Usando il teorema di Steiner si trova il momento di inerzia rispetto a un asse passante per il centro di massa:

$$I_{CM} = I_O - mb^2$$

Infine, usando di nuovo il teorema si trova il momento di inerzia per un asse passante dal punto di contatto iniziale:

$$I_P = I_{CM} + m(R - b)^2 = \frac{1}{2} mR^2 - mb^2 + m(R - b)^2 = \frac{1}{2} mR^2 + mR(R - 2b)$$

2 È un moto rotatorio. Vale che:

$$\vec{M} = \vec{I}\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{M}{I}$$

dove $\vec{M} = \vec{r} \wedge \vec{F} = rF = 1{,}8\,m \cdot 19{,}6\,N = 35{,}28\,N\cdot m$

Inoltre: $I = \frac{1}{2} m r^2 = \frac{50\,Kg \cdot 1{,}8^2\,m^2}{2} = 81\,Kg\cdot m^2$

a) quindi $\alpha = \frac{M}{I} = \frac{35{,}28\,N\cdot m}{81\,Kg\cdot m^2} = 0{,}435\,rad/s^2$

b) L'angolo dopo 5 s è:

$$\omega = \alpha t = 0{,}435\,rad/s^2 \cdot 5\,s = 2{,}18\,rad/s$$

c) Quando il corpo ruota attorno al suo asse principale di inerzia la velocità angolare e il momento d'inerzia sono paralleli. Allora il momento angolare è:

$$\vec{L} = \vec{r} \wedge \vec{p} = \vec{r} \wedge m\vec{v} = r \cdot m\omega r = mr^2\omega = I\omega$$

$$\Rightarrow L = I\omega = 81\,Kg\cdot m^2 \cdot 2{,}18\,rad/s = 176{,}6\,Kg\cdot m^2/s$$

d) $K_R = \frac{1}{2} I\omega^2 = \frac{81 \cdot 2{,}18^2}{2} = 192{,}5\,J$ ■

4 Scegliamo un sistema di coordinate convenienti, in modo che il moto si trovi nel 1° quadrante. y positive perpendicolari al piano e x positive parallele al piano verso il basso.

Il moto è verso e' dato ma di tipo decelerato. La reazione vincolare e l'attrito garantiscono il rotolamento.

Le equazioni della dinamica sono:

$$\begin{cases} P_{\parallel} + F_a = -m a_x \\ N - P_{\perp} = m a_y = 0 \\ M = I\alpha \end{cases}$$

$P_{\parallel} = P\,\text{sen}(20°)$

$P_{\perp} = P\cos(20°)$

$F_a = \mu N = \mu m g = \mu P_{\parallel}$

Sappiamo che vale $a_x = \alpha r \Rightarrow \alpha = \frac{a_x}{r}$

e che $M = F_a \cdot r$

$$\begin{cases} P\,\text{sen}(20°) + F_a = -\frac{P}{g} a_x \Rightarrow P\,\text{sen}(20°) = a_x\left(-\frac{P}{g} - \frac{1}{2}m\right) = a_x\left(-\frac{P}{g} - \frac{1}{2}\frac{P}{g}\right) \Rightarrow \\ N = P\cos(20°) \\ M = \frac{1}{2} m r^{\cancel{2}} \cdot \frac{a_x}{\cancel{r}} = \frac{1}{2} m r a_x \Rightarrow F_a \cdot r = \frac{1}{2} m r a_x \Rightarrow F_a = \frac{1}{2} m a_x \end{cases}$$

$P\,sen(20°) = \frac{3P}{2g}\,a_x \Rightarrow a_x = -\frac{2}{3}g\,sen(20°) = -2,25\ m/s^2$

a_x è negativa, quindi $-ma_x$ è diretta verso il basso.
Per trovare il tempo scriviamo la composizione della velocità nel moto unif.mente accelerato:

$V = V_0 + at \Rightarrow 0 = V_0 + a_x t$

Assumiamo nulla la velocità finale. V_0 è negativa perché diretta verso l'alto.

$0 = -10 - 2,25\,t \Rightarrow t = \frac{10\ m/s}{2,25\ m/s^2} = 4,4\ s$ ■