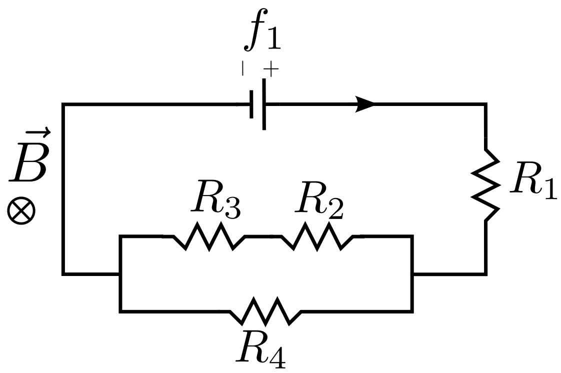
Tutorato Fisica 2

Foglio di Esercizi n. 9

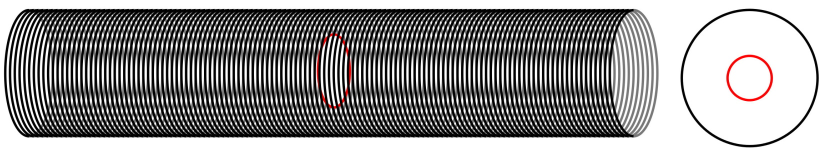
Esercizio 1

Nel circuito disegnato in figura, avente superficie S, è presente un campo magnetico $B = B_0 t$ diretto perpendicolarmente ed entrante al piano del circuito. Conoscendo i valori delle 4 resistenze e della differenza di potenziale f_P calcolare la potenza dissipata dalla resistenza R_3.



Esercizio 2

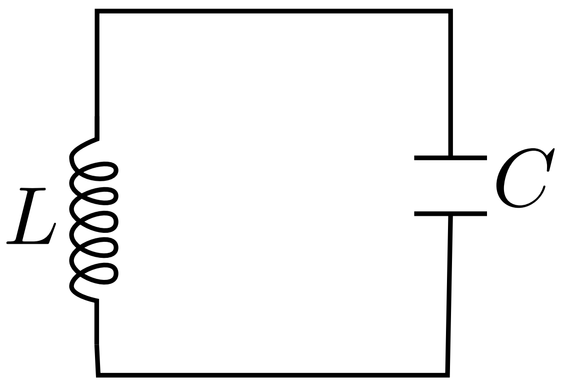
Un solenoide di lunghezza L formato da N spire di raggio r è percorso da una corrente $i(t) = i_0 \sin(\omega t)$. All'interno del solenoide si trova una spira circolare di raggio $a < r$ e resistenza R coassiale con il solenoide (vedi figura). Calcolare la forza per unità di lunghezza esercitata sulla spira. Se il periodo di oscillazione della corrente è T calcolare l'energia dissipata in un'ora.



Esercizio 3

Un condensatore di capacità $C = 1\mu F$ caricato con una differenza di potenziale $V_0 = 10$ viene staccato dal generatore e collegato ad un solenoide di induttanza $L = 1\mu H$ attaverso un circuito con resistenza trascurabile. Determinare il campo B al interno del solenoide all'istante $t^* = 1.57\mu s$. Sapendo che il solenoide ha $n = 1000$ spire ed ha un raggio r piccolo rispetto alla lunghezza.

$[B(t^*) = 1.26 \cdot 10^{-2}$ T$]$

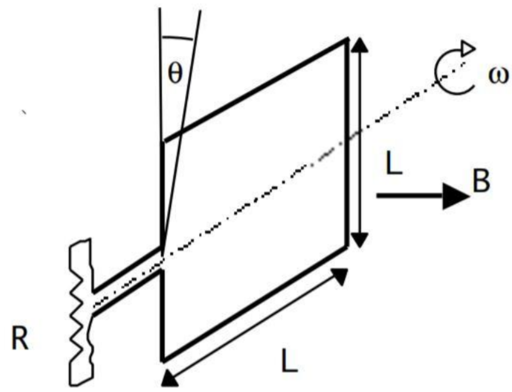


Esercizio 4

Una spira quadrata di lato $L = 1\,\mathrm{m}$ ruota attorno ad un asse orizzontale con una velocità angolare $\omega = 2\pi\,\mathrm{rad/s}$.
La spira è immersa in un campo magnetico uniforme $B = 2\,\mathrm{T}$ diretto lungo l'asse z, ortogonale all'asse della spira.
La spira, di resistenza trascurabile, è connessa a una resistenza di carico $R = 0.2\,\Omega$.

Calcolare:

1. La corrente che circola nella spira in funzione del tempo
2. Il momento massimo che agisce sulla spira
3. L'energia dissipata sulla resistenza in 10 secondi
4. La somma in valore assoluto delle cariche che circolano nella spira in 10 secondi

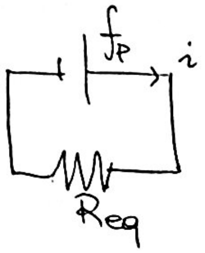


SOLUZIONE 1

$$f_i = -\frac{d\phi(\vec{B})}{dt} = -\frac{d}{dt}\int \vec{B}\cdot d\vec{S} = -\frac{d}{dt}\left(B_0 t S\right) = -B_0 S$$

$$\Rightarrow f_{TOT} = f_p + f_i = f_p - B_0 S$$

RISCRIVIAMO IL CIRCUITO COME



CON $\quad i = \dfrac{f_{TOT}}{R_{eq}}$

$$R_{eq} = \left((R_3+R_2)^{-1} + R_4^{-1} \right)^{-1} + R_1 =$$

$$= \left(\frac{R_4+R_3+R_2}{R_4R_3+R_4R_2} \right)^{-1} + R_1 = \frac{R_4(R_3+R_2)+R_1(R_2+R_3+R_4)}{R_2+R_3+R_4}$$

$$\begin{cases} i = i_1 + i_2 \\ i_1(R_2+R_3) = \overbrace{(i - i_1)}^{i_2} R_4 \end{cases} \Rightarrow i_1(R_2+R_3+R_4) = i R_4$$

$$i_1 = i \frac{R_4}{R_2+R_3+R_4}$$

$$P(R_3) = R_3 i_1^2 = R_3 \left(\frac{f_{TOT}}{R_{eq}}\right)^2 \left(\frac{R_4}{R_2+R_3+R_4}\right)^2 =$$

$$= R_3 \frac{(f_p - B_0 S)^2 \cancel{(R_2+R_3+R_4)^2}}{\left[R_4(R_3+R_2)+R_1(R_2+R_3+R_4)\right]^2} \cdot \frac{R_4^2}{\cancel{(R_2+R_3+R_4)^2}} =$$

$$= \frac{R_3 R_4^2 (f_p - B_0 S)^2}{\left[R_4(R_3+R_2)+R_1(R_2+R_3+R_4)\right]^2}$$

SOLUZIONE 2

$$\vec{F} = i\,\vec{\ell}\times\vec{B} \quad ; \quad \vec{\ell}\perp\vec{B} \Rightarrow \quad F = i\ell B$$

DOBBIAMO CALCOLARE $\dfrac{F}{\ell} = iB$

IL CAMPO $\vec{B}$ DEL SOLENOIDE È DIRETTO LUNGO L'ASSE E VALE

$$B = \mu_0 \frac{N}{L} I = \mu_0 \frac{N}{L} I_0 \sin(\omega t)$$

SULLA SPIRA PICCOLA:

$$\phi(\vec{B}) = \int_S \vec{B}\cdot d\vec{S} = \int_S B\,dS = B\pi a^2 = \pi a^2 \mu_0 \frac{N}{L} I_0 \sin(\omega t)$$

$$f_i = -\frac{d\phi(\vec{B})}{dt} = -\pi a^2 \mu_0 \frac{N}{L} I_0 \omega \cos(\omega t)$$

$$i = \frac{f_i}{R} = \frac{-\pi a^2 \mu_0 N}{LR} I_0 \omega \cos(\omega t)$$

$$\Rightarrow \frac{F}{\ell} = iB = \frac{\pi a^2}{R}\left(\mu_0 \frac{N}{L} I_0\right)^2 \omega \sin(\omega t)\cos(\omega t)$$

PER L'ENERGIA DISSIPATA IN UN'ORA:

$$E = \int_t P\,dt = \overline{P}\,1h = \overline{P}\,3600\,s$$

LA POTENZA SARÀ

$$\overline{P} = \frac{1}{T}\int_0^T \frac{f_i^2}{R}\,dt = \left(\frac{\pi a^2 \mu_0 I_0 \omega N}{L}\right)^2 \cdot \frac{1}{RT}\int_0^T \cos^2(\omega t)\,dt$$

$$\overset{\omega=\frac{2\pi}{T}}{=} \left(\frac{\pi a^2 \mu_0 N I_0}{L}\cdot\frac{2\pi}{T}\right)^2 \cdot \frac{1}{RT}\cdot\frac{T}{2} = \left(\frac{\pi a^2 \mu_0 N I_0 2\pi}{LT}\right)^2 \cdot \frac{1}{2R}$$

SOLUZIONE 3

L'EQ. DEL CIRCUITO LC È

$$-L\frac{di}{dt} - q/C = 0$$

$$i = \frac{dq}{dt} \Rightarrow \frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{LC} = 0$$

LA SOLUZIONE È $q(t) = q_0 \cos\omega t$, $\begin{cases} \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} \\ q_0 = CV_0 \end{cases}$

$$i(t) = \frac{dq}{dt} = q_0\omega \sin\omega t$$

IL CAMPO MAGNETICO SI OTTIENE TRASCURANDO LE DIMENSIONI LONGITUDINALI DEL SOLENOIDE

$$B = \mu_0 n\, i(t)$$

NUMERICAMENTE A $t = t^*$

$$B = \mu_0 C V_0 \sqrt{\frac{1}{LC}} \sin\left\{\frac{t^*}{\sqrt{LC}}\right\} n =$$

$$= 4\pi\, 10^{-7}\, 10^{-6}\, \frac{10}{\sqrt{10^{-6}\, 10^{-6}}} \sin\left\{\frac{1.57\ 10^{-6}}{\sqrt{10^{-6}\cdot 10^{-6}}}\right\} \times 10^3 =$$

$$= 1.26 \times 10^{-2}\ T$$

Soluzione Esercizio 4

Il flusso del campo magnetico B attraverso la spira è

$$\Phi(\mathrm{B}) = \int_S \mathrm{B} \cdot \mathrm{dS} = \mathrm{BL}^2\cos(\alpha) = \mathrm{BL}^2\cos(\omega \mathrm{t})$$

dove α è l'angolo fra la direzione del campo B e la normale alla superficie della spira. Pertanto, la corrente indotta è:

$$\mathrm{i} = \frac{\mathrm{fem}}{\mathrm{R}} = -\frac{1}{\mathrm{R}}\frac{\partial \Phi(\mathrm{B})}{\partial \mathrm{t}} = \frac{\omega \mathrm{BL}^2 \sin \omega \mathrm{t}}{\mathrm{R}} = 62.83 \cdot \sin(2\pi \mathrm{t}) \text{ (1)}$$

Il lavoro fatto dal momento che agisce sulla spira è dW=Mdθ. Quindi, la potenza spesa è pari a $\mathrm{M}\frac{d\theta}{dt} = \mathrm{M}\omega$. La potenza spesa si ritrova in potenza elettrica dissipata sulla resistenza. Per cui si ha:

$$\mathrm{M} = \frac{\mathrm{P}}{\omega} = \frac{\mathrm{Ri}^2}{\omega} = \frac{\omega \mathrm{B}^2\mathrm{L}^4 \mathrm{sen}^2 \omega \mathrm{t}}{\mathrm{R}} \qquad \mathrm{M}_{\mathrm{max}} = \frac{\omega \mathrm{B}^2 \mathrm{L}^4}{\mathrm{R}} = 125.6 \text{ Nm (2)}$$

L'energia dissipata è l'integrale della potenza nei 10 secondi. Il periodo di rotazione della spira è di 1 secondo, per cui l'integrale di $\mathrm{sen}^2(\omega \mathrm{t})$ vale T/2. Quindi, si ha:

$$\mathrm{W} = \int_0^{10} \mathrm{Ri}^2 \mathrm{dt} = \frac{\omega^2 \mathrm{B}^2 \mathrm{L}^4}{\mathrm{R}} \int_0^{10} \mathrm{sen}^2(\omega \mathrm{t}) \mathrm{dt} = \frac{\omega^2 \mathrm{B}^2 \mathrm{L}^4}{\mathrm{R}} 5 = 3.95 \text{ kJ (3)}$$

La legge di Felici permette di calcolare la carica quando è presente un campo magnetico dal flusso variabile che induce una corrente in un circuito. Essa afferma che la differenza tra il flusso del campo magnetico concatenato al circuito nello stato iniziale ed il flusso nello stato finale, divisa per la resistenza del circuito, è pari alla carica totale che attraversa il circuito. In questo caso la carica totale sarà nulla:

$$\mathrm{Q} = \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{\mathrm{R}} = 0$$

Infatti, considerando la carica con il segno, visto che il moto è periodico, dopo un numero intero di giri la caricato totale circolata è nulla. Il flusso finale è uguale a quello iniziale.

Tuttavia, il problema chiede la somma delle cariche fluite in valore assoluto. Ogni mezzo giro, il flusso si inverte, quindi sfruttando ancora la legge di Felici si ha:

$$\mathrm{Q} = \left|\frac{\mathrm{BL}^2 - (-\mathrm{BL}^2)}{\mathrm{R}}\right| + \left|\frac{(-\mathrm{BL}^2) - (\mathrm{BL}^2)}{\mathrm{R}}\right| = 400 \text{ C (4)}$$