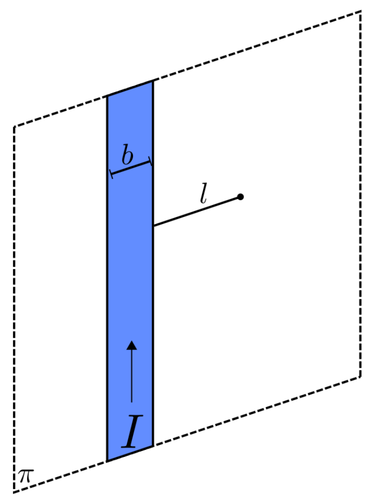
Tutorato Fisica 2

Foglio di Esercizi n.6

Esercizio 1

Un nastro conduttore rettilineo, di piccolo spessore e molto lungo, ha larghezza $b = 5$ cm ed è percorso da una corrente, costante ed uniformemente distribuita sulla sezione del nastro, la cui intensità è $I = 10$ A.
Calcolare, nel vuoto, il valore $\vec{B}_0$ in un punto nel piano π individuato dal nastro a distanza $l = 10$ cm dal bordo più vicino.

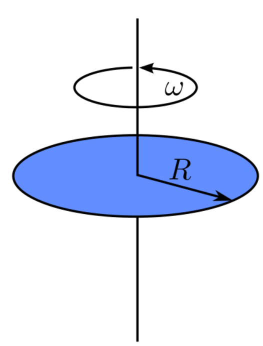
[$B_0 = 1.62 \cdot 10^{-5}$ T]



Esercizio 2

Un disco di raggio $R = 10$ cm e spessore trascurabile, uniformemente carico con densità superficiale $\sigma = 10^{-7}\,\mathrm{C/m^2}$, ruota con velocità angolare $\omega = 10^4$ rad/s. Determinare il campo magnetico al centro del disco.

[$B_0 = 6.28 \cdot 10^{-11}$ T]

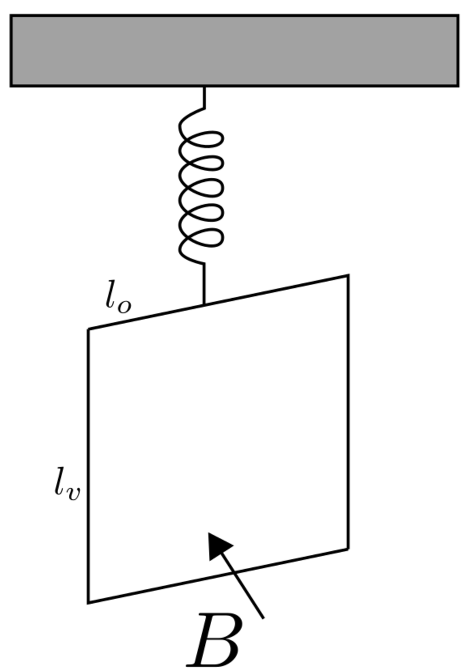


Esercizio 3

Una molla è sospesa verticalmente con l'estremo superiore fissato. Se all'estremità inferiore della molla è applicata una forza $||\vec{F}|| = 0.125$ N si ottiene un allungamento $d_0 = 1$ cm.
Se invece si appende all'estremità inferiore una spira rettangolare con lati orizzontali $l_o = 15$ cm e verticali $l_v = 10$ cm. Il filo che forma la spira ha una sezione $S = 1\,\mathrm{mm}^2$ ed è composto da un materiale conduttore di densità $\rho_M = 20\,\mathrm{g/cm}^3$. Il lato inferiore della spira è immerso in un campo magnetico $B = 0.5$ T, uniforme orizzontale e perpendicolare al lato stesso. Determinare:

- Costante elastica della molla.
- L'allungamento della molla se la spira è percorsa da una corrente $i = 1$ A, al variare del senso di circolazione della corrente.

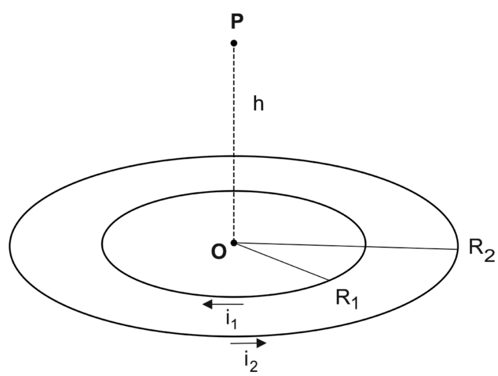
[$K = 12.5$ N/m, $\Delta x_1 = 1.38$ cm, $\Delta x_2 = 1.85$ cm]



Esercizio 4

Due spire circolari concentriche di raggio $R_1 = 10$ cm e $R_2 = 17$ cm sono percorse da corrente di verso opposto, rispettivamente $i_1 = 5$ A in senso orario e $i_2 = 8$ A in senso antiorario.
Si calcolino modulo, direzione e verso del campo magnetico $\vec{B}$ in un punto dell'asse delle spire a quota $h = 15$ cm dal piano in cui esse giacciono. Inoltre, che raggio R_2' dovrebbe avere la seconda spira affinché il campo magnetico risultate sia nullo al centro delle due spire?

[$B = 7.1 \cdot 10^{-6}$ T, $R_2' = 16$ cm]

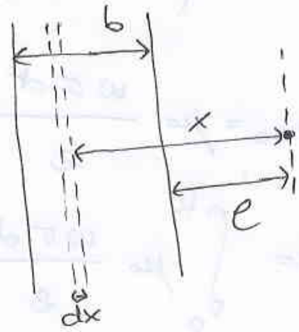


SOLUZIONE ESERCIZIO 1

L'EFFETTO COMPLESSIVO DEL NASTRO PERCORSO DA CORRENTE PUÒ ESSERE OTTENUTO CONSIDERANDO GLI EFFETTI ELEMENTARI DELLE STRISCE PARALLELE DI LARGHEZZA dx. OGNI STRISCIA ELEMENTARE EQUIVALE AD UN FILO RETTILINEO INDEFINITO, CON CONTRIBUTO $d\vec{B}_0$.

DALLA RELAZIONE DI BIOT-SAVART:

$$d\vec{B}_0 = \frac{\mu_0}{2\pi x}\, dI\, \hat{n}$$



CON:

- x : DISTANZA DAL PUNTO IN CUI SI STA CALCOLANDO $\vec{B}$

$$dI = I \frac{dx}{b}$$

- $\hat{n}$: VERSORE DELLA NORMALE AL PIANO

$$\vec{B}_0 = \int d\vec{B}_0 = \hat{n} \int_{l}^{l+b} \frac{\mu_0 I}{2\pi b} \frac{dx}{x} = \hat{n} \frac{\mu_0 I}{2\pi b} \ln\left(\frac{l+b}{l}\right)$$

E NUMERICAMENTE, IL MODULO DEL CAMPO SARÀ

$$B_0 = \frac{\mu_0 I}{2\pi b} \ln\left(\frac{l+b}{l}\right) = 1{,}62 \cdot 10^{-5}\ T$$

SOLUZIONE ESERCIZIO (2)

IL CAMPO MAGNETICO GENERATO DA UN ELEMENTO DI SUPERFICIE (BASE $2\pi r$ ED ALTEZZA dr) È

$$dB_0 = \mu_0 \frac{dI}{2r}.$$

LA CORRENTE SARÀ DATA DA

$$dI = \frac{dq}{T} = \frac{\sigma\, dS}{2\pi/\omega} = \frac{\omega \sigma 2\pi r\, dr}{2\pi} = \omega \sigma r\, dr$$

$$\Rightarrow \quad dB_0 = \mu_0 \frac{\omega \sigma\, dr}{2}$$

$$\Rightarrow \quad B = \int_0^R \mu_0 \frac{\omega \sigma\, dr}{2} = \frac{\mu_0 \omega \sigma R}{2}$$

NUMERICAMENTE

$$B = \frac{4\pi \cdot 10^{-7} \cdot 10^{4} \cdot 10^{-7} \cdot 10^{-1}}{2} = 6{,}28 \cdot 10^{-11}\ T$$

SOLUZIONE 3

i) PER LA FORZA ELASTICA $\vec{F} = -k\underbrace{\vec{\Delta x}}_{d_0} \Longrightarrow k = \frac{|\vec{F}|}{d_0} = \frac{0.125}{10^{-2}} = 12.5\,N/m$

ii) ALL'EQUILIBRIO LA FORZA AGENTE SULLA MOLLA AL TOTALE DELLE FORZE AGENTI SULLA SPIRA, QUINDI DI LORENTZ E FORZA PESO

$$\begin{cases} |\vec{F}_L| = i\, l_0 B \\ |\vec{F}_P| = mg = \rho_M S P g \end{cases}$$

: agisce solo sulla ~~spira~~ parte inferiore della spira

dove P è il perimetro della spira

$$P = 2(l_0 + l_V)$$

$$\longrightarrow \begin{cases} |\vec{F}_L| = 1 \times 0.15 \times 0.5 = 7.5 \times 10^{-2}\,N \\ |\vec{F}_P| = 9.81 \times 10^{-2}\,N \end{cases}$$

$$\vec{F}_{TOT} = \vec{F}_L + \vec{F}_P$$

A SECONDA DEL VERSO DI SCORRIMENTO DELLA CORRENTE SI HA, SE FORZA PESO E DI LORENTZ SONO CONCORDI

$$\Delta x_1 = \frac{F_L + F_P}{k} = 1.38\ cm$$

$$\Delta x_2 = \frac{F_P - F_L}{k} = 1.83\ mm$$

Soluzione

Il campo magnetico risultante $\mathbf{B}$ è la somma dei due campi generati da ogni spira che saranno in direzione contraria in quanto i_1 e i_2 sono in senso opposto.

Calcoliamo quindi il campo magnetico generato da una singola spira sul proprio asse a distanza generica x. Il campo infinitesimo generato da una porzione di spira ds in un punto P a distanza x sull'asse sarà

$$d\mathbf{B}_n = \frac{\mu_0}{4\pi d^2} i\, ds \cos\theta \hat{\mathrm{n}}$$

dove d è la distanza del punto P dalla porzione di spira e θ è l'angolo formato da $d\mathbf{B}$ con l'asse. Quando si considerano i contributi $d\mathbf{B}$ di tutti gli elementi infinitesimi che formano la spira, le componenti parallele all'asse si sommano, mentre quelle trasversali si annullano per la simmetria del problema. Il campo magnetico risultante sarà dunque parallelo all'asse della spira e sarà dato da:

$$\mathbf{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{\cos\theta}{d^2} \hat{\mathbf{n}} \oint ds = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{R}{d^3} 2\pi R\, \hat{\mathbf{n}} = \frac{\mu_0 i}{2} \frac{R^2}{(R^2 + x^2)^{3/2}}\, \hat{\mathbf{n}}$$

in quanto $\cos\theta = R/d$ e $d^2 = R^2 + x^2$. In questo modo, i campi generati dalle due spire a distanza h dal piano saranno:

$$\mathbf{B}_1 = -\frac{\mu_0 i_1}{2} \frac{R_1^2}{(R_1^2 + h^2)^{3/2}}\, \hat{\mathbf{n}} \simeq -5.36 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{T}\, \hat{\mathbf{n}}$$

$$\mathbf{B}_2 = \frac{\mu_0 i_2}{2} \frac{R_2^2}{(R_2^2 + h^2)^{3/2}}\, \hat{\mathbf{n}} \simeq 1.25 \cdot 10^{-5}\,\mathrm{T}\, \hat{\mathbf{n}}$$

e di conseguenza il campo risultate totale sarà:

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_1 + \mathbf{B}_2 \simeq 7.1 \cdot 10^{-6}\,\mathrm{T}\, \hat{\mathbf{n}}\,.$$

Per avere un campo nullo nel centro delle spire, è necessario che

$$\mathbf{B}_O = \mathbf{B}_{1,O} + \mathbf{B}_{2,O} = 0$$

dove i campi generati dalle due spire nel centro O sono dati da

$$\mathbf{B}_{1,O} = -\frac{\mu_0 i_1}{2R_1}\, \hat{\mathbf{n}} \qquad \text{e} \qquad \mathbf{B}_{2,O} = \frac{\mu_0 i_2}{2R_2'}\, \hat{\mathbf{n}}\,.$$

Eguagliando le due espressioni per i campi, si trova quindi:

$$R_2' = R_1 \frac{i_2}{i_1} = 16\,\mathrm{cm}\,.$$