Tutorato Fisica 2

Foglio di Esercizi n. 3

Esercizio 1

Sia data una sfera di raggio $R = 50$ cm avente una densità di carica $\rho(r) = \alpha r$ e carica totale $Q = 10 \cdot 10^{-6}$ C.

- Determinare il valore di α.
- Determinare l'andamento del campo elettrico in tutto lo spazio. Calcolarne esplicitamente il valore sulla superficie.
- Determinare l'energia elettrostatica generata dalla distribuzione.

Una particella carica con $q = 1.0 \cdot 10^{-12}$ C e di massa $m = 1.0 \cdot 10^{-6}$ Kg viene sparata da distanza $r \gg R$ con velocità iniziale v_0 verso il centro della sfera.

- Determinare il valore minimo di v_0 per cui tale carica raggiunge il centro della sfera.

[$\alpha = 5.1 \cdot 10^{-5}$ C/m^4, $E(R) = 3.6 \cdot 10^4$ V/m,
$U = 1.0 \cdot 10^{-2}$ J, $v_0 = 1.9 \cdot 10^{-1}$ m/s]

Esercizio 2

Data una sfera di raggio $R = 10^{-13}$ cm con una carica

complessiva $q = 3.2 \cdot 10^{-18}$ C. Calcolare l'energia elettrostatica del campo nei seguenti casi:

- La carica è distribuita uniformemente sulla superficie della sfera.
- La carica è distribuita uniformemente su tutto il volume.

[$U = 4.61 \cdot 10^{-11}$ J,$U = 5.53 \cdot 10^{-11}$ J]

Esercizio 3

Due sfere conduttrici di raggio $R_1 = 1$ cm e $R_2 = 3$ cm sono poste con i centri ad una distanza $L = 2$ m. Inizialmente entrambe hanno la stessa carica $Q_0 = 2 \cdot 10^{-3}$ C.

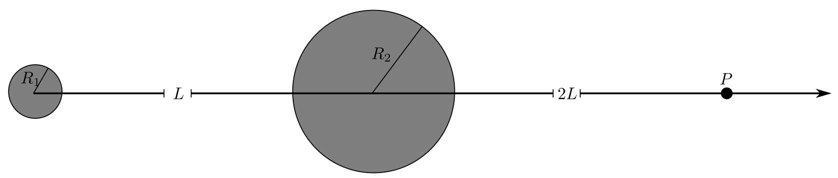
- Calcolare la forza esercitata su una carica puntiforme $q_0 = -2 \cdot 10^{-6}$ C posta nel punto P ad una distanza $2L$ dal centro della seconda sfera (vedi figura).
- Calcolare il lavoro necessario per portare la carica q_0 all'infinito.

In seguito le due sfere vengono connesse con un filo conduttore.

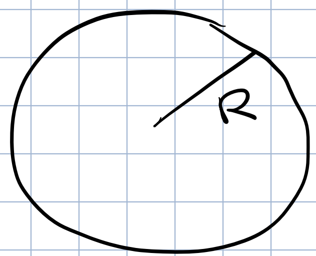
- Quali sono le cariche Q_1 e Q_2 che si misurano sulle due sfere?
- Quale è l'energia dissipata nel processo?

Nota: La distanza L tra le due sfere è $L \gg R_i$, trascurare gli effetti di mutua induzione.

[$F = -3.25$ N, $W = -15$ J,
$Q_1 = 1 \cdot 10^{-3}$ C, $Q_2 = 3 \cdot 10^{-3}$ C,
$\Delta U = 6 \cdot 10^5$ J]



1)



$R = 50\,cm$

$\rho(r) = \alpha r$

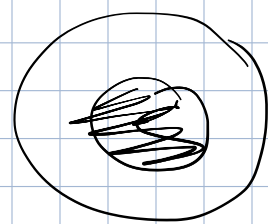
$Q = 10 \cdot 10^{-6}\,C$

$$Q = \int_0^R dV \rho = 4\pi \int_0^R dr\, r^2 \alpha r = \pi \alpha R^4$$

$$\Rightarrow \quad \alpha = \frac{Q}{\pi R^4} = 5{,}1 \cdot 10^{-5} \frac{C}{m^4}$$

USIAMO IL TEOREMA DI GAUSS PER DETERMINARE $E(r)$:

$$\phi(\vec{E}) = \int \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0}$$



DISTINGUIAMO I DUE CASI:

$r \leq R$
$$E\, 4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_0^r \rho(r')\, dV = \frac{4\pi}{\varepsilon_0} \int_0^r \alpha r'^3\, dr' =$$

$$= \frac{\cancel{4\pi}\, \alpha}{\varepsilon_0} \frac{r^4}{\cancel{4}} = \frac{Q\, r^2}{\varepsilon_0 R^4}$$

$$\Rightarrow \quad E(r) = \frac{Q}{4\pi} \frac{r^2}{R^4}$$

se $r > R$
$$E\, 4\pi r^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0} \quad \Rightarrow \quad E(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q}{r^2}$$

SULLA SUPERFICIE SFERICA per $r = R$

$$E(R) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{R^2}{R^4} = 3{,}6 \cdot 10^5\, V/m$$

$$U = \frac{1}{2} \varepsilon_0 \int dV\, |\vec{E}|^2 = \frac{1}{2} \varepsilon_0\, 4\pi \int_0^\infty dr\, r^2 |E(r)|^2$$

SPEZZO L'INTEGRALE TRA 0,R e TRA R,∞

$$U = \frac{1}{2}\varepsilon_0 4\pi \left[\int_0^R d^3r \, |\vec{E}(r \le R)|^2 + \int_R^\infty d^3r \, |\vec{E}(r>R)|^2 \right] =$$

$$= \frac{1}{2}\varepsilon_0 4\pi \left[\int_0^R dr \, \frac{Q^2}{(4\pi)^2 \varepsilon_0^2} \frac{r^6}{R^8} + \int_R^\infty dr \, \frac{Q^2}{(4\pi)^2 \varepsilon_0^2} \frac{1}{r^2} \right] =$$

$$= \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0} \left[\frac{1}{R^8} \frac{R^7}{7} + \frac{1}{R} \right] = \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0} \frac{1}{R} \left[\frac{1}{7} + 1 \right] = 1 \cdot 10^{-2} \, J$$

LA PARTICELLA ARRIVA AL CENTRO SE $E_k \geq U$, OSSIA

$$\frac{1}{2} m v_0^2 \geq q_0 \Delta V \implies v_0 \geq \sqrt{\frac{2 q_0 \Delta V}{m}}$$

CALCOLO $\Delta V = -\int_{+\infty}^0 \vec{E}(r) \, dr = \int_0^\infty \vec{E}(r) \, dr$

COME PRIMA SPEZZO L'INTEGRALE NEI DUE CONTRIBUTI:

$$\Delta V = \int_0^R dr \, \vec{E}(r \le R) + \int_R^\infty dr \, \vec{E}(r > R) =$$

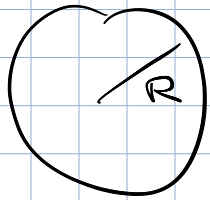
$$= \int_0^R dr \, \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{r^3}{R^4} + \int_R^\infty dr \, \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r^2} =$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{R^3}{3R^4} + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{R} = \frac{Q}{3\pi\varepsilon_0} \frac{1}{R}$$

LA VELOCITÀ MINIMA SI HA PER $v_0 = \sqrt{\frac{2 q_0 \Delta V}{m}}$

$$\implies v_0 = \sqrt{\frac{2 q_0 Q}{3\pi \varepsilon_0 m R}} = 0{,}63 \, m/s.$$

2)



1) LA CARICA È DISTRIBUITA UNIFORMEMENTE SULLA SUP DELLA SFERA

PER $r \leq R$ $\quad E(r) = 0$, PER GAUSS $(Q_{int} = 0)$

PER $r > R$ $\quad E(r) = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$

CALCOLO $U(r) =$

$$U(r) = \frac{\varepsilon_0}{2}\int_0^\infty |E(r)|^2 d^3r \qquad U(r \leq R) = 0$$

PER $r \geq R$ $\quad E(r) = 0 \Rightarrow U(r) = \dfrac{4\pi\varepsilon_0}{2}\displaystyle\int_R^\infty dr\, r^2 \frac{q^2}{(4\pi\varepsilon_0)^2 r^4} =$

$$= \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R} = 4{,}61 \cdot 10^{-11}\ \text{J}.$$

2) CARICA DISTRIBUITA UNIFORMEMENTE SU TUTTO IL VOLUME

$$q = \int_0^R \rho\, 4\pi r^2 dr = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho$$

USO TEO GAUSS:

SE $r \leq R$ $\qquad E(r)\, 4\pi r^2 = \dfrac{1}{\varepsilon_0}\displaystyle\int_0^r \rho(r')\, d^3r' = \dfrac{4\pi}{\varepsilon_0}\rho \int_0^r dr' r'^2$

$$\Rightarrow E(r)\, 4\pi r^2 = \frac{4\pi\rho}{\varepsilon_0}\frac{r^3}{3} \Rightarrow E(r) = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}$$

SE $r \geq R$ $\quad E(r)\, 4\pi r^2 = \dfrac{q}{\varepsilon_0} = \dfrac{\frac{4}{3}\pi R^3 \rho}{\varepsilon_0}$

$$\Rightarrow E(r) = \frac{R^3 \rho}{3\varepsilon_0 r^2}$$

CALCOLO U E SPEZZO L'INTEGRALE:

$$U(r) = \frac{\varepsilon_0}{2}\left[\int_0^R d^3r\, |E(r \leq R)|^2 + \int_R^\infty d^3r\, |E(r > R)|^2\right] =$$

$$= \frac{\varepsilon_0}{2}\left[\int_0^R \left(\frac{\rho r}{3\varepsilon_0}\right)^2 4\pi r^2\, dr + \int_R^\infty \left(\frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2}\right)^2 4\pi r^2\right] =$$

$$= \frac{4\pi}{15\varepsilon_0}\rho^2 R^5 = 5{,}53 \cdot 10^{-4}\ \mathrm{J}.$$

3) $\vec{F}(P) = q_0 \vec{E}(\vec{P})$

$\vec{E}(P) = \vec{E}_1(P) + \vec{E}_2(P)$

PER LA SIMMETRIA DEL PROBLEMA IN P IL CAMPO È DIRETTO LUNGO x:

$E_x(P) = E_{1x}(P) + E_{2x}(P) =$

dove $E_{ix}(P) = \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{|x_i - x_P|^2}$

$\Rightarrow E_x(P) = \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{9L^2} + \frac{1}{4L^2}\right) = \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0} \frac{13}{36}$

$\Rightarrow F(P) = q_0 E_x(P) = \frac{q_0 Q_0}{4\pi\varepsilon_0} \frac{13}{36} = -3{,}25N.$

PER PORTARE q_0 DA P ALL'∞ $\quad W(P) = q_0 \Delta V = q_0(V(P) - \overset{0}{V(\infty)})$

$= q_0 V(P)$

$V(P) = V_1(P) + V_2(P)$, $\quad V_i = \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{|x_i - x_P|}$

$\Rightarrow V(P) = \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{3L} + \frac{1}{2L}\right) = \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0} \frac{5}{6}$

$\Rightarrow W(P) = \frac{q_0 Q_0}{4\pi\varepsilon_0} \frac{5}{6} = -15{,}J < 0$ PERCHÉ È COMPIUTO DALLA FORZA ELETTROSTATICA E QUINDI DAL SISTEMA

QUANDO LE DUE SFERE VENGONO CONNESSE LA LORO CARICA SI

RIDISTRIBUISCE SULLE DUE SUPERFICI

$\Rightarrow$ AVREMO Q_1 SULLA PRIMA SFERA e Q_2 SULLA SECONDA

LE DUE SFERE SI DEVONO TROVARE ALLO STESSO V, POICHÉ COLLEGATE

$$\Rightarrow \quad V_1 = V_2.$$

DATA LA DISTANZA TRA LE DUE SFERE $V_i(R_i) = \frac{Q_i}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R_i}$

$$\Rightarrow \quad \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R_1} = \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R_2} \quad \Rightarrow \quad \frac{Q_1}{R_1} = \frac{Q_2}{R_2}$$

LA CARICA SI CONSERVA $\Rightarrow$ $Q_1 + Q_2 = 2Q_0$

$$\Rightarrow \begin{cases} Q_1 + Q_2 = 2Q_0 \\ \frac{Q_1}{R_1} = \frac{Q_2}{R_2} \end{cases}$$

RISOLVENDO: $Q_1 = \frac{2Q_0}{1 + R_2/R_1} = 10^{-2}C$

$$Q_2 = 2Q_0 - Q_1 = 3 \cdot 10^{-2}C$$

L'ENERGIA DISSIPATA È $\Delta U = |U_f - U_i|$,

$$U = \int_{R_1}^{\infty} \frac{1}{2}\varepsilon_0 |E(r)|^2 4\pi r^2 dr = \int_{R_1}^{\infty} \frac{\varepsilon_0}{2}\left(\frac{Q_i}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\right)^2 4\pi r^2 =$$

$$= \frac{Q_i^2}{8\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R_i}$$

dove $Q_i = Q_0, Q_0$, $R_i = R_1, R_2$ NELLO STATO INIZIALE

e $Q_i = Q_1, Q_2$ NELLO STATO FINALE.

$$\Rightarrow U_i = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q_0^2}{R_1} + \frac{Q_0^2}{R_2}\right) = 2{,}4 \cdot 10^6 \text{ J}$$

$$U_f = \frac{1}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{Q_1^2}{R_1} + \frac{Q_2^2}{R_2}\right) = 1{,}8 \cdot 10^6 \text{ J}$$

$$\Rightarrow \Delta U = 6 \cdot 10^5 \text{ J}.$$