Tutorato Fisica 2

Foglio di Esercizi n. 3

Esercizio 1

Sia data una sfera di raggio $R = 50$ cm avente una densità di carica $\rho(r) = \alpha r$ e carica totale $Q = 10 \cdot 10^{-6}$ C.

- Determinare il valore di α.
- Determinare l'andamento del campo elettrico in tutto lo spazio. Calcolarne esplicitamente il valore sulla superficie.
- Determinare l'energia elettrostatica generata dalla distribuzione.

Una particella carica con $q = 1.0 \cdot 10^{-12}$ C e di massa $m = 1.0 \cdot 10^{-6}$ Kg viene sparata da distanza $r \gg R$ con velocità iniziale v_0 verso il centro della sfera.

- Determinare il valore minimo di v_0 per cui tale carica raggiunge il centro della sfera.

[$\alpha = 5.1 \cdot 10^{-5}$ C/m^4, $E(R) = 3.6 \cdot 10^4$ V/m,
$U = 1.0 \cdot 10^{-2}$ J, $v_0 = 1.9 \cdot 10^{-1}$ m/s]

Esercizio 2 Data una sfera di raggio $R = 10^{-13}$ cm con una carica

complessiva $q = 3.2 \cdot 10^{-18}$ C. Calcolare l'energia elettrostatica del campo nei seguenti casi:

- La carica è distribuita uniformemente sulla superficie della sfera.
- La carica è distribuita uniformemente su tutto il volume.

[$U = 4.61 \cdot 10^{-11}$ J,$U = 5.53 \cdot 10^{-11}$ J]

Esercizio 3

Due sfere conduttrici di raggio $R_1 = 1$ cm e $R_2 = 3$ cm sono poste con i centri ad una distanza $L = 2$ m. Inizialmente entrambe hanno la stessa carica $Q_0 = 2 \cdot 10^{-3}$ C.

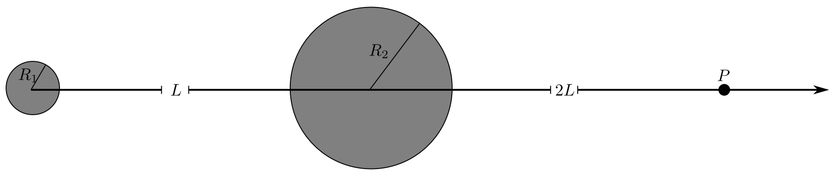
- Calcolare la forza esercitata su una carica puntiforme $q_0 = -2 \cdot 10^{-6}$ C posta nel punto P ad una distanza $2L$ dal centro della seconda sfera (vedi figura).
- Calcolare il lavoro necessario per portare la carica q_0 all'infinito.

In seguito le due sfere vengono connesse con un filo conduttore.

- Quali sono le cariche Q_1 e Q_2 che si misurano sulle due sfere?
- Quale è l'energia dissipata nel processo?

Nota: La distanza L tra le due sfere è $L \gg R_i$, trascurare gli effetti di mutua induzione.

[$F = -3.25$ N, $W = -15$ J,
$Q_1 = 1 \cdot 10^{-3}$ C, $Q_2 = 3 \cdot 10^{-3}$ C,
$\Delta U = 6 \cdot 10^5$ J]



SOLUZIONE ESERCIZIO 1

a) LA CARICA TOTALE RISULTA

$$Q = \int_0^R dV \rho = 4\pi \int_0^R dr\, r^2 \alpha r = \pi \alpha R^4$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{Q}{\pi R^4} = 5.1 \times 10^{-5} \frac{C}{m^4}$$

b) PER IL CALCOLO DEL CAMPO ELETTRICO SFRUTTIAMO IL TEO. DI GAUSS APPLICATO A SUPERFICI SFERICHE DI RAGGIO r

$$E(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{r^2}{R^4} \quad , \quad r \leq R$$

$$E(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{r^2} \quad , \quad r > R$$

$$E(R) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} R^2/R^4 = 3.6 \times 10^4 \; V/m$$

c) PER IL CALCOLO DELL'ENERGIA SFRUTTIAMO IL CAMPO ELETTRICO CALCOLATO IN PRECEDENZA

$$U = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \int dV |\vec{E}|^2 = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \, 4\pi \int_0^\infty dr\, r^2 |E|^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\varepsilon_0 \, 4\pi \times \left[\int_0^R dr \left\{ \frac{Q^2}{(4\pi)^2 \varepsilon_0^2} \frac{r^4}{R^4} \right\} + \int_R^\infty dr \frac{Q^2}{(4\pi)^2 \varepsilon_0^2} \frac{1}{r^2} \right] =$$

$$= \frac{Q^2}{8\pi\varepsilon_0} \frac{1}{R} \left[\frac{1}{7} + 1 \right] = 1.0 \times 10^{-2} \; J$$

d) La particella raggiunge il centro se l'energia cinetica è almeno pari alla differenza di potenziale tra l'infinito e il centro della distibuzione di carica.

$$\frac{1}{2}mv_0^2 \geq q_0 \Delta V$$

dove

$$\Delta V = -\int_{\infty}^{0} E(r)\mathrm{d}r = \int_{0}^{\infty} E(r)\mathrm{d}r = \int_{0}^{R} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{r^2}{R^4}\mathrm{d}r + \int_{R}^{\infty} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{r^2}\mathrm{d}r =$$

$$\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R^4}\left[\frac{1}{3}r^3\right]_0^R + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{r}\right]_R^{\infty} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{3R} + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R} = \frac{Q}{3\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R}$$

La velocità minima sarà dunque

$$v_0 = \sqrt{\frac{2q_0}{m}\Delta V} = \sqrt{\frac{2q_0}{m}\frac{Q}{3\pi\varepsilon_0}\frac{1}{R}} = 0.69\,\mathrm{m/s}$$

SOLUZIONE ESERCIZIO 2

1. Carica distribuita uniformemente sulla superficie della sfera:

$$E(0 \leq r < R) = 0$$

$$E(r \geq R) = \frac{q}{4\pi \varepsilon_0 r^2}$$

$$\Rightarrow \quad U = \frac{\varepsilon_0}{2}\int E^2 dV = \frac{\varepsilon_0}{2}\int_R^\infty \left(\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\right)^2 4\pi r^2 dr =$$

$$= \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0}\int_R^\infty \frac{1}{r^2} dr = \frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 R} = 4.61\cdot 10^{-11}\ J$$

2. Carica distribuita uniformemente sul volume della sfera:

$$q = \int_0^R \rho\, 4\pi r^2 dr = \frac{4}{3}\pi R^3 \rho$$

$$E(0 \leq r \leq R) = \frac{\rho r}{3\varepsilon_0}$$

$$E(r \geq R) = \frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2}$$

$$\Rightarrow \quad U = \frac{\varepsilon_0}{2}\int_0^R \left(\frac{\rho r}{3\varepsilon_0}\right)^2 4\pi r^2 dr + \frac{\varepsilon_0}{2}\int_R^\infty \left(\frac{\rho R^3}{3\varepsilon_0 r^2}\right)^2 4\pi r^2 dr = \frac{4\pi}{15\varepsilon_0}\rho^2 R^5$$

$$= \frac{6}{5}\,\frac{q^2}{8\pi\varepsilon_0 R} = 5.53\cdot 10^{-11}\ J$$

Soluzione Esercizio 3 La forza nel punto P sulla carica q_0 è data

dall'equazione:

$$\vec{F}(P) = q_0\vec{E}(P),$$

Dato che la distanza tra le sfere L molto maggiore rispetto alle loro dimensioni, possiamo trascurare gli effetti di induzione reciproca. Consideriamo quindi le distribuzioni di carica uniformi sulle superfici. Per il principio di sovrapposizione il campo elettrico è dato dalla somma dei campi generati separatamente dalle due distribuzioni

$$\vec{E}(P) = \vec{E}_1(P) + \vec{E}_2(P)$$

Data la simmetria del del problema il campo nel punto P è diretto solo lungo x

$$E_{ix} = \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{(|x_i - x_P|)^2}$$

$$E_x = E_{1x} + E_{2x} = \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{9L^2} + \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{4L^2} = \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0}\frac{13}{36}$$

$$F = q_0 E_x = \frac{q_0 Q_0}{4\pi\varepsilon_0}\frac{13}{36} = -3.25 \text{ N}$$

Il lavoro compiuto dalle forze elettrostatiche per portare la carica q_0 dal punto P all'infinito è

$$W(P) = q_0 V(P)$$

Anche per il potenziale vale il principio di sovrapposizione e quindi:

$$V_i = \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{|x_i - x_P|}$$

$$V = V_1 + V_2 = \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{3L} + \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{2L} = \frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0}\frac{5}{6}$$

$$W = q_0 V = \frac{q_0 Q_0}{4\pi\varepsilon_0}\frac{5}{6} = -15 \text{ J}$$

Il lavoro negativo in quanto è compiuto dalle forza elettrostatiche e quindi dal sistema.
Quando le due sfere vengono connesse elettricamente, la loro carica si ridistribuisce, sulle due superfici ed avremo quindi una carica Q_1 sulla prima sfera ed una carica Q_2 sulla seconda. Data la distanza tra le due sfere possiamo approssimare il potenziale sulla superficie della sfera i con quello generato solo dalla carica presente su essa:

$$V_i(R_i) = \frac{Q_i}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{R_i}$$

Essendo collegate da un filo le due sfere costituiscono un unico conduttore, di conseguenza le superfici delle due sfere devono essere allo stesso potenziale.

$$V_1 = V_2 \quad \Rightarrow \quad \frac{Q_1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{R_1} = \frac{Q_2}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{R_2} \quad \Rightarrow \quad \frac{Q_1}{R_1} = \frac{Q_2}{R_2}$$

Se applichiamo anche la conservazione della carica ($Q_1 + Q_2 = 2Q_0$) abbiamo un sistema di due equazioni in due incognite che da come risultato:

$$Q_1 = \frac{2Q_0}{1 + R_2/R_1} = 1 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{C}$$

$$Q_2 = 2Q_0 - Q_1 = 3 \cdot 10^{-2}\ \mathrm{C}$$

L'energia dissipata nel processo sarà pari alla variazione dell'energia elettrostatica del sistema.

$$U_i = \int_{R_i}^{\infty} \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2(\tau) 4\pi\tau^2 \mathrm{d}\tau = \int_{R_i}^{\infty} \frac{1}{2}\varepsilon_0 \left(\frac{Q_0}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{\tau^2}\right)^2 4\pi\tau^2 \mathrm{d}\tau =$$

$$= \frac{Q_0^2}{8\pi\varepsilon_0} \int_{R_i}^{\infty} \frac{\mathrm{d}\tau}{\tau^2} = \frac{Q_0^2}{8\pi\varepsilon_0} \frac{1}{R_i}$$

$$U_{IN} = \frac{Q_0^2}{8\pi\varepsilon_0} \frac{1}{R_1} + \frac{Q_0^2}{8\pi\varepsilon_0} \frac{1}{R_2} = 2.4 \cdot 10^6\ \mathrm{J}$$

$$U_{FIN} = \frac{Q_1^2}{8\pi\varepsilon_0} \frac{1}{R_1} + \frac{Q_2^2}{8\pi\varepsilon_0} \frac{1}{R_2} = 1.8 \cdot 10^6\ \mathrm{J}$$

La variazione di energia è quindi

$$\Delta U = |U_{FIN} - U_{IN}| = 6 \cdot 10^5\ \mathrm{J}$$