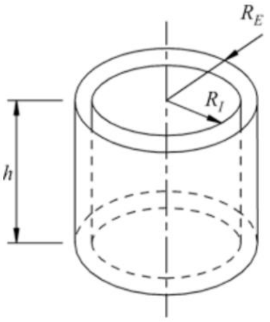
Tutorato del 18/05/2021

Problema 1

Determina il momento di inerzia di un cilindro cavo rispetto al suo asse geometrico con Re=600 mm Ri=500 mm h=200 mm con ρ=7,8 kg/dm^3.



Problema 2

Un disco di massa 50 kg e raggio 180 cm ruota attorno al suo asse. Sull'orlo del disco viene applicata una forza F=19,6 N. Il disco parte da fermo. Calcola:

a) La sua accelerazione angolare

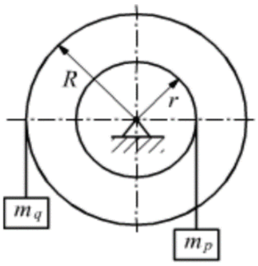
b) L'angolo descritto dopo 5 sec.

c) Il momento della quantità di moto

d) La sua energia cinetica dopo 5sec.

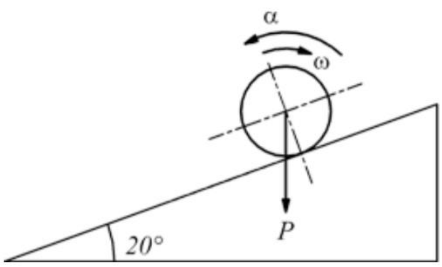
Problema 3

Il sistema di pulegge solidali e imperniate sullo stesso albero di figura ha un momento di inerzia I=13,3kg*m^2, calcola l'accelerazione angolare delle pulegge e le tensioni delle funi, sapendo che R=0,6m, r=0,3m, q=1000 N, p=3000 N.



Problema 4

Un cilindro di raggio r=50 cm e di peso P=40 N si muove in un dato istante alla velocità v=10 m/s su un piano inclinato di 20°. Quanto tempo impiega a raggiungere il punto più alto della sua traiettoria?



TUTORATO DEL 18/05/21 - CORPO RIGIDO V

SOLUZIONI

1 Per il cilindro esterno abbiamo:

$I_e = \frac{1}{2} m_e R_e^2$ ma $m_e = \rho \cdot \underbrace{h \pi R_e^2}_{V_e}$

quindi $I_e = \frac{1}{2} (\rho h \pi R_e^2) R_e^2$

Analogamente, per il cilindro interno:

$I_i = \frac{1}{2} (\rho h \pi R_i^2) R_i^2$

Quindi, per il cilindro cavo:

$I = I_e - I_i = \frac{1}{2} \rho \pi h (R_e^4 - R_i^4) = \frac{1}{2} \rho \pi h (R_e^2 + R_i^2)(R_e^2 - R_i^2)$

che possiamo riscrivere come:

$I = \left[\frac{1}{2} \rho \pi h R_e^2 - \frac{1}{2} \rho \pi h R_i^2\right](R_e^2 + R_i^2) = \left[\frac{1}{2} m_e - \frac{1}{2} m_i\right](R_e^2 + R_i^2) =$

$= \frac{1}{2} m (R_e^2 + R_i^2)$ dove m è la massa del cilindro cavo.

Sostituendo i numeri:

$R_e = 0{,}6$ m $R_i = 0{,}5$ m $h = 0{,}2$ m $\rho = 7800$ Kg/ m^3

$V = (\pi R_e^2 - \pi R_i^2) h = \pi h (R_e^2 - R_i^2) = 0{,}069$ m^3

$m = \rho V = 7800 \frac{kg}{m^3} \cdot 0{,}069\, m^3 = 539$ kg

$I = \frac{1}{2} m (R_e^2 + R_i^2) = 164{,}3$ Kg$\cdot$m^2 ■

$\boxed{2}$ È un moto rotatorio. Vale che:

$$\vec{M} = \vec{I}\alpha \Rightarrow \alpha = \frac{M}{I}$$

dove $\vec{M} = \vec{r} \wedge \vec{F} = rF = 1{,}8\,m \cdot 19{,}6\,N = 35{,}28\ N\cdot m$

Inoltre: $I = \frac{1}{2} m r^2 = \frac{50\,Kg \cdot 1{,}8^2\,m^2}{2} = 81\ Kg\cdot m^2$

a) quindi $\alpha = \frac{M}{I} = \frac{35{,}28\ N\cdot m}{81\ Kg\cdot m^2} = 0{,}435\ rad/s^2$

b) L'angolo dopo 5 s è:

$$\omega = \alpha t = 0{,}435\ rad/s^2 \cdot 5\,s = 2{,}18\ rad/s$$

c) Quando il corpo ruota attorno al suo asse principale di inerzia la velocità angolare e il momento d'inerzia sono paralleli. Allora il momento angolare è:

$$\vec{L} = \vec{r} \wedge \vec{p} = \vec{r} \wedge m\vec{v} = r \cdot m\omega r = mr^2\omega = I\omega$$

$$\Rightarrow L = I\omega = 81\ Kg\cdot m^2 \cdot 2{,}18\ rad/s = 176{,}6\ Kg\cdot m^2/s$$

d) $K_R = \frac{1}{2} I\omega^2 = \frac{81 \cdot 2{,}3^2}{2} = 192{,}5\ J$ ■

$\boxed{3}$ Abbiamo che:

$$m_p = \frac{p}{g} = \frac{3000\,N}{g} = 305{,}8\,N \qquad m_q = \frac{q}{g} = \frac{1000\,N}{g} = 102\ Kg$$

È prevedibile che prevalga p. La puleggia si muoverà in senso orario.
Le equazioni del moto per le due masse saranno:

$$\begin{cases} m_q a_q = T_q - q & \text{con } a_q = \alpha R \Rightarrow T_q = q + m_q \alpha R \\ m_p a_p = p - T_p & \text{con } a_p = \alpha r \Rightarrow T_p = p - m_p \alpha r \end{cases}$$

Le equazioni dei momenti sono:

$T_p r - T_q R = I\alpha$ sostituendo le espressioni trovate di T_p e T_q abbiamo:

$$(p - m_p \alpha r)r - (q + m_q \alpha R)R = I\alpha$$

$$\Rightarrow \alpha(I + m_p r^2 + m_q R^2) = pr - qR$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{pr - qR}{I + m_p r^2 + m_q R^2} = \frac{3000 \cdot 0,3 - 1000 \cdot 0,6}{13,3 + 305,8 \cdot 0,3^2 + 102 \cdot 0,6^2} \simeq 3,9 \ \frac{rad}{s^2}$$

Quindi le tensioni sono:

$$T_q = q + m_q \alpha R = 1000 + 102 \cdot 3,9 \cdot 0,6 = 1236,7 \text{ N}$$

$$T_p = p - m_p \alpha r = 3000 + 305,8 \cdot 3,9 \cdot 0,3 = 3359,8 \text{ N} \ \blacksquare$$

$\boxed{4}$ Scegliamo un sistema di coordinate convenienti, in modo che il moto si trovi nel 1° quadrante. y positive perpendicolari al piano e x positive parallele al piano verso il basso.

Il moto é verso e' dato ma di tipo decelerato. La reazione vincolare e l'attrito garantiscono il rotolamento.

Le equazioni della dinamica sono:

$$\begin{cases} P_{//} + F_a = -ma_x \\ N - P_\perp = ma_y = 0 \\ M = I\alpha \end{cases}$$

$P_{//} = P\sin(20°)$

$P_\perp = P\cos(20°)$

$F_a = \mu N = \mu mg = \mu P_{//}$

Sappiamo che vale $a_x = \alpha r \Rightarrow \alpha = \frac{a_x}{r}$

e che $M = F_a r$

$$\begin{cases} P\sin(20°) + F_a = -\frac{P}{g} a_x \Rightarrow P\sin(20°) = a_x\left(-\frac{P}{g} - \frac{1}{2}m\right) = a_x\left(-\frac{P}{g} - \frac{1}{2}\frac{P}{g}\right) \\ N = P\cos(20°) \\ M = \frac{1}{2} m r^{\cancel{2}} \frac{a_x}{\cancel{r}} = \frac{1}{2} m r a_x \Rightarrow F_a r = \frac{1}{2} m r a_x \Rightarrow F_a = \frac{1}{2} m a_x \end{cases}$$

$\Longrightarrow$

$$P\,\mathrm{sen}(20°) = \frac{3P}{2g}\,a_x \Longrightarrow a_x = -\frac{2}{3}g\,\mathrm{sen}(20°) = -2{,}25\ m/s^2$$

a_x è negativa, quindi $-ma_x$ è diretta verso il basso.
Per trovare il tempo scriviamo la composizione della velocità nel moto unif/mente accelerato:

$$V = V_0 + at \Longrightarrow 0 = V_0 + a_x t$$

Assumiamo nulla la velocità finale. V_0 è negativa perché diretta verso l'alto.

$$0 = -10 - 2{,}25\,t \Longrightarrow t = \frac{10\ m/s}{2{,}25\ m/s^2} = 4{,}4\ s \ ■$$