Tutorato Fisica 2 - Foglio di Esercizi n. 2

Esercizio 1

Si consideri una distribuzione di carica a simmetria sferica di densità

$$\rho(r) = Ar(a - r) \quad \text{per} \quad r \leq a, \quad \text{e} \quad \rho = 0 \quad \text{per} \quad r > a.$$

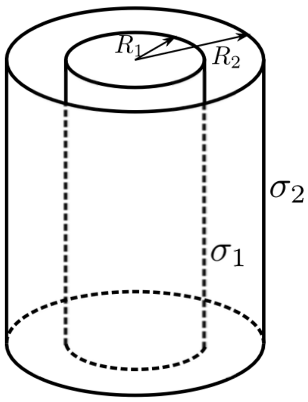
Dove r è la coordinata radiale sferica, l'origine delle coordinate è nel centro della distribuzione, con $a > 0$ e A costanti dimensionali.

- Si determini la carica totale Q della distribuzione in esame.
- Si determini in ogni punto dello spazio il campo elettrostatico $\mathbf{E}(\mathbf{r})$.
- Si determini in ogni punto dello spazio il potenziale elettrostatico $V(r)$ generato dalla distribuzione, assumendo che esso si annulli all'infinito.

Esercizio 2

Due superfici cilindriche coassiali di raggio R_1 e R_2 (con $R_1 < R_2$) sono cariche con densità superficiale rispettivamente σ_1 e σ_2. Si calcolino:

- Il campo elettrostatico ed il potenziale in tutto lo spazio, assumendo nullo il potenziale sulla superficie R_2.
- Si disegnino inoltre gli andamenti.

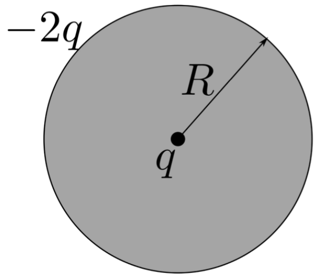


Esercizio 3

Una carica puntiforme q è posta al centro di una distribuzione di carica sferica ed uniforme di raggio $R = 3\,\mathrm{cm}$ e di carica totale $-2q$.

Calcolare il valore r_0 tale per cui il campo elettrostatico è nullo.

[$r_0 = 2.38\,\mathrm{cm}$]



Esercizio 4

Una quantità di carica positiva Q è distribuita su un anello piatto isolante avente raggio interno a e raggio esterno b. La carica è distribuita in modo che la densità di carica (carica per unità di area) sia data da

$$\sigma = \frac{k}{r^3}$$

dove r è la distanza dal centro dell'anello di un punto su di esso. Si dimostri che il potenziale (con $V(\infty) = 0$) nel centro dell'anello è dato da:

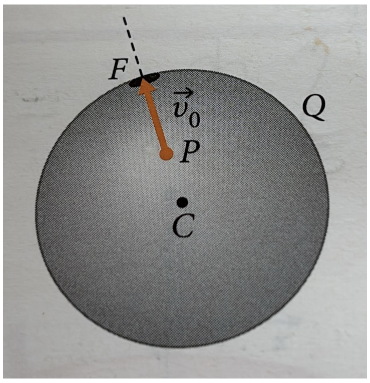
$$V = \frac{Q}{8\pi\epsilon_0}\left(\frac{a+b}{ab}\right)$$

Esercizio 5

Una superficie sferica cava è disposta nel vuoto e su di essa è distribuita uniformemente una carica positiva Q con densità superficiale σ. Nella sfera è praticato un piccolo foro F, attraverso il quale viene lanciata radialmente, dall'interno verso l'esterno, una pallina puntiforme P di massa m, dotata di carica negativa $-q$. Con quale velocità iniziale minima v_0 deve essere lanciata affinché essa possa allontanarsi indefinitamente sfuggendo all'attrazione della sfera?

$$Q = 1,0 \times 10^{-8}\,\mathrm{C}, \quad \sigma = 2,0 \times 10^{-7}\,\mathrm{C/m^2}, \quad m = 1,0 \times 10^{-6}\,\mathrm{kg}, \quad q = Q$$

(Risposta: $v_0 \geq 5,34\,\mathrm{m/s}$)



1) LA CARICA CONTENUTA ENTRO UNA SFERA DI RAGGIO r VALE:

$$Q(r) = \begin{cases} 4\pi A \int_0^r (a-r')(r')^3\, dr' = 4\pi r^4 A\left(\frac{a}{4} - \frac{r}{5}\right) & r \le a \\ 4\pi A \int_0^a (a-r')(r')^3\, dr' = \pi A \frac{a^5}{5} & r > a \end{cases}$$

LA CARICA TOTALE DELLA DISTRIBUZIONE È:

$$Q = \frac{\pi A a^5}{5}$$

$\vec{E}$ HA SOLO COMPONENTE RADIALE $\vec{E}(\vec{r}) = E_r(r)\,\hat{r}$

$$E_r(r) = \frac{Q(r)}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \begin{cases} \frac{A r^2 (5a - 4r)}{20\,\varepsilon_0}, & r \le a \\ \frac{A a^5}{20\varepsilon_0 r^2}, & r > a \end{cases}$$

CALCOLO IL POTENZIALE NELLE DUE REGIONI

Se $r \le a$ $\quad V(r) = \int_r^a dr'\, E(r') = \int_r^a dr' \frac{A r'^2 (5a - 4r')}{20\varepsilon_0} =$

$$= \frac{A}{60\varepsilon_0}\left(3r^4 - 5ar^3 + 2a^4\right)$$

SE $r > a$ $\quad V(r) = \int_r^\infty dr'\, E(r') = \int_r^\infty dr' \frac{A a^5}{20\varepsilon_0 r^2} = \frac{A a^5}{20\varepsilon_0 r}$

2) USIAMO IL TEOREMA DI GAUSS CONSIDERANDO UNA SUPERFICIE CILINDRICA DI RAGGIO r E ALTEZZA h

CONSIDERIAMO LE 3 REGIONI:

$r<R_1$

$$\phi_S(\vec{E}) = \int_S \vec{E}\cdot d\vec{S} = E\,2\pi r h = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0} \Rightarrow E=0$$

$R_1<r<R_2$

$$\phi_S(\vec{E}) = 2\pi r h E = \frac{\sigma_1 2\pi R_1 h}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\sigma_1 R_1}{\varepsilon_0 r_1}$$

$r>R_2$

$$\phi_S(\vec{E}) = 2\pi r h E = \frac{2\pi h}{\varepsilon_0}\left(\sigma_1 R_1 + \sigma_2 R_2\right)$$

$$\Rightarrow E = \frac{\sigma_1 R_1 + \sigma_2 R_2}{\varepsilon_0 r}$$

CALCOLIAMO IL POTENZIALE NELLE 3 REGIONI:

$r<R_1$

$$\int_{V(0)}^{V(r)} dV = -\int_0^r E\,dr' \Rightarrow V(r)-V(0)=0 \Rightarrow V(r)=\text{cost}$$

$R_1 < r < R_2$

$$\int_{V(R_1)}^{V(r)} dV = -\int_0^r E\, dr' = -\frac{\sigma_1 R_1}{\varepsilon_0}\int_{R_2}^{r} \frac{1}{r'}\, dr' =$$

$$= -\frac{\sigma_1 R_1}{\varepsilon_0} \ln\left(\frac{r}{R_2}\right) = V(r) - V(R_1)$$

$r > R_2$

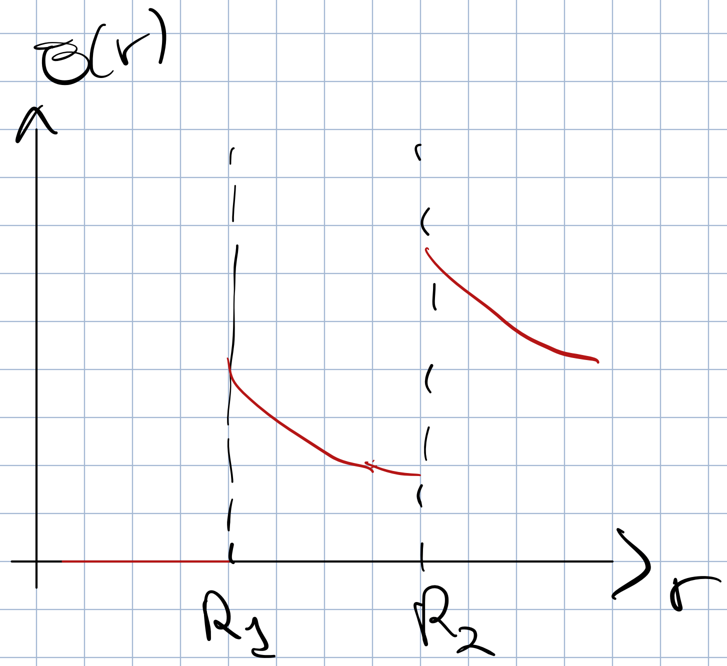
$$\int_{V(R_2)}^{V(r)} dV = -\int_{R_2}^{r} E\, dr' = -\frac{\sigma_1 R_1 + \sigma_2 R_2}{\varepsilon_0} \ln\left(\frac{r}{R_2}\right)$$

$$= V(r) - V(R_2)$$

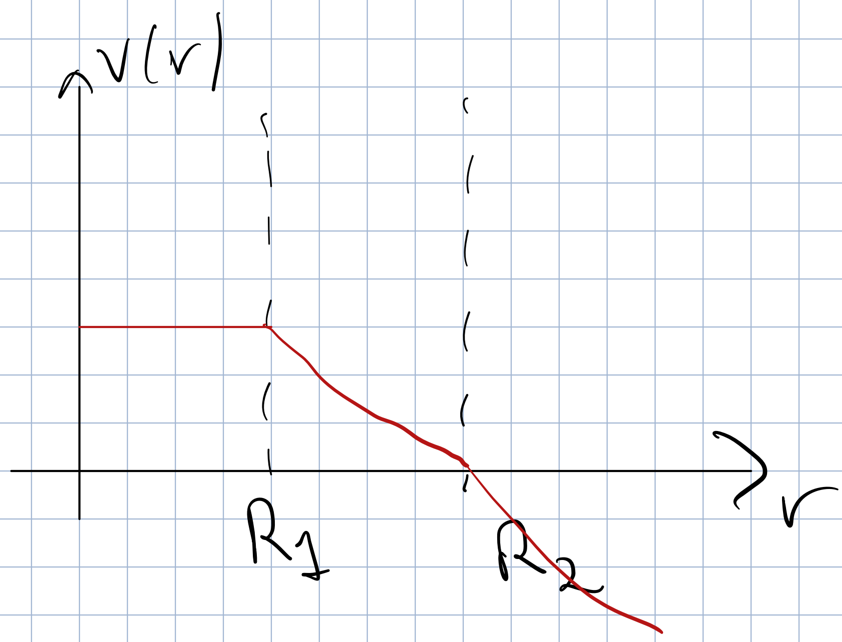
$$\Rightarrow V(r) = -\left(\frac{\sigma_1 R_1 + \sigma_2 R_2}{\varepsilon_0}\right) \ln\left(\frac{r}{R_2}\right) + \cancel{V(R_2)}^{\,0}$$

TROVIAMO $V(R_1)$ IMPONENDO LA CONTINUITÀ DEL POTENZIALE:

$$V(R_1) = -\frac{\sigma_1}{\varepsilon_0} R_1 \ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right)$$

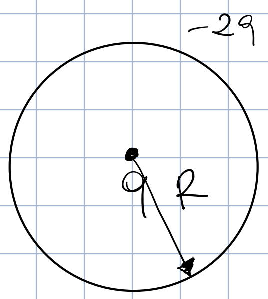


σ(r)
r
R1
R2



V(r)
r
R1
R2

3)



Consideriamo i campi generati dalle due CARICHE

1. La CARICA q posta al centro genera un campo radiale, diretto verso l'esterno:

$$|\vec{E}'_q| = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2} \quad , r>0$$

2. La carica con distribuzione sferica genera anch'essa un campo radiale, ma diretto verso il centro

USIAMO IL TEOREMA DI GAUSS:

$$\phi_{\Sigma'}(\vec{E}'_{-2q}) = \int_{\Sigma'} d\vec{S}' \cdot \vec{E}'_{-2q} = |\vec{E}'_{-2q}|\, 4\pi r^2 = \frac{Q_{INT}}{\varepsilon_0} = \frac{-2q}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow \quad |\vec{E}'_{-2q}| = \left|\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{-2q}{r^2}\right| \quad , r>R$$

IN MODULO $|\vec{E}'_{-2q}| > |\vec{E}'_q| \quad \forall r>R \Rightarrow E_{TOT} \neq 0$ per $r>R$

Dobbiamo cercare r_0 ALL'INTERNO, usiamo GAUSS:

$$\phi_{\Sigma'}(\vec{E}'_{-2q}) = \int_{\Sigma'} d\vec{S}' \cdot \vec{E}'_{-2q} = |\vec{E}'_{-q}|\, 4\pi r^2 = \frac{Q(r)}{\varepsilon_0}$$

dove $Q(r) = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$

$$\rho = \frac{Q_{TOT}}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{-2q}{4/3\,\pi R^3} \Rightarrow Q(r) = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho = \frac{\cancel{4/3\,\pi}\, r^3 Q_{TOT}}{\cancel{4/3\,\pi}\, R^3}$$

$$\Rightarrow \quad Q(r) = -2q\left(\frac{r}{R}\right)^3$$

da cui: $\quad |\vec{E}_{-2q}| = \left| \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \left(\frac{-2qr}{R^3} \right) \right|$

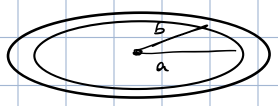
impongo che il campo totale sia nullo in $r = r_0$

$\vec{E}_q + \vec{E}_{-2q} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad |\vec{E}_q + \vec{E}_{-2q}| = 0$

$\Rightarrow \quad \cancel{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}} \frac{q}{r_0^2} = \cancel{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}} \frac{2q\,r_0}{R^3} \quad \Rightarrow \quad r_0^3 = \frac{R^3}{2} \quad \Rightarrow$

$r_0 = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} R \simeq 2.38\ \text{cm}$.

Es. 4



- $\sigma = \frac{k}{r^3}$
- $V(\infty) = 0$

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{dq}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int \frac{\sigma\, ds}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^{2\pi} d\varphi \int_a^b \frac{k}{r^3}\frac{\cancel{r}\,dr}{\cancel{r}} = \frac{k}{4\pi\varepsilon_0} 2\pi \int_a^b \frac{dr}{r^3} =$$

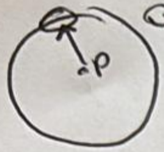
$$= \frac{k}{2\varepsilon_0}\int_a^b \frac{dr}{r^3} = \frac{k}{2\varepsilon_0}\frac{1}{2}\left[-\frac{1}{r^2}\right]_a^b =$$

$$= \frac{k}{4\varepsilon_0}\left[\frac{1}{a^2} - \frac{1}{b^2}\right] = \frac{k}{4\varepsilon_0}\left[\frac{b^2-a^2}{a^2b^2}\right] = \frac{k}{4\varepsilon_0}\left[\frac{(b-a)(b+a)}{a^2b^2}\right]$$

$$Q = \int_S \sigma\, ds = \int_a^b \frac{k}{r^{\cancel{3}\,2}} 2\pi \cancel{r}\, dr = 2\pi k \int_a^b \frac{1}{r^2}\, dr = 2\pi k \left[-\frac{1}{r}\right]_a^b =$$

$$= 2\pi k\left[\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right] = 2\pi k\left(\frac{b-a}{ab}\right)$$

$$\Rightarrow \quad V = \overbrace{\frac{2\pi k}{8\pi}\left(\frac{b-a}{ab}\right)}^{= Q}\left(\frac{b+a}{ab}\right) = \frac{Q}{8\pi\varepsilon_0}\left(\frac{b+a}{ab}\right)$$



Q, σ cava

P → puntiforme, massa m
→ -q

v_0 min? per allontanarsi dalla sfera

$E = 0$ dentro sfera ⇒ V cost

$V_0(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{r}$ ⇒ sulla sup sferica $V_0(R) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{Q}{R}$

Ricavo R sfera: $Q = \sigma A = \sigma 4\pi R^2 \Rightarrow R = \sqrt{\frac{Q}{4\pi\sigma}} = 6,3$ cm

sostituisco in $V_0(R) = 1428$ V.

Uscita dalla sfera la particella ha energia potenziale $U_0 = -q V_0(R)$

quindi $E_{TOT} = E_k + U_0 = \frac{1}{2} m v_0^2 + U_0 = \frac{1}{2} m v_0^2 - q V_0(R)$

e l'energia si conserva

affinché la particella arrivi all'∞ devo avere $E_{TOT} \geq 0$

$\Rightarrow \frac{1}{2} m v_0^2 \geq q V_0(R) \Rightarrow v_0 \geq \sqrt{\frac{2 q V_0(R)}{m}} = 5,34$ m/s.