Tutorato Fisica 2
Foglio di Esercizi n. 2

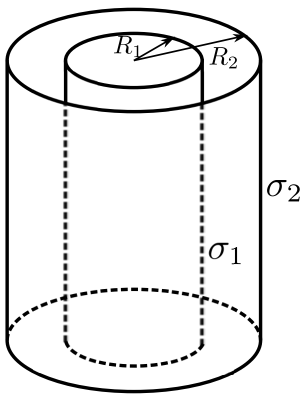
Esercizio 1

Si consideri una distribuzione di carica a simmetria sferica di densità $\rho(r) = Ar(a - r)$ per $r \leq a$ e $\rho = 0$ per $r > a$. Dove r è la coordinata radiale sferica, l'origine delle coordinate è nel centro della distribuzione, $a > 0$ ed A sono costanti dimensionali.

- Si determini la carica totale Q della distribuzione in esame.
- Si determini in ogni punto dello spazio il campo elettrostatico $\vec{E}(\vec{r})$.
- Si determini in ogni punto dello spazio il potenziale elettrostatico $V(r)$ generato dalla distribuzione in esame, assumendo che esso si annulli all'infinito.

Esercizio 2

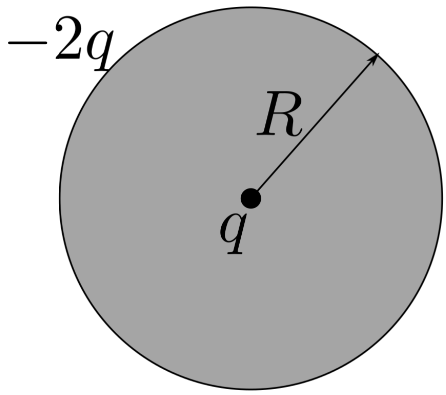
Due superfici cilindriche coassiali di raggio R_1 e R_2 (con $R_1 < R_2$) sono cariche con densità superficiale rispettivamente σ_1 e σ_2 Si calcolino il campo elettrostatico ed il potenziale in tutto lo spazio assumendo nullo il potenziale sulla superficie R_2, se ne disegnino in oltre gli andamenti.



Esercizio 3

Una carica puntiforme q è posta al centro di una distribuzione di carica sferica ed uniforme di raggio $R = 3$ cm e di carica totale $-2q$.
Calcolare il valore r_0 tale per cui il campo elettrostatico è nullo.

[$r_0 = 2.38$ cm]



SOLUZIONE ESERCIZIO 1

1. La carica contenuta entro una sfera di raggio r vale:

$$Q(r) = \begin{cases} 4\pi A \int_0^r (a-r')(r')^3 dr' = 4\pi r^4 A\left(\frac{a}{4} - \frac{r}{5}\right); & r \leq a \\ 4\pi A \int_0^a (a-r')(r')^3 dr' = \pi A \frac{a^5}{5}; & r > a \end{cases}$$

dunque la carica totale della distribuzione è:

$$Q = \frac{\pi A a^5}{5}$$

2. Il campo elettrico ha solo componente radiale: $\vec{E}(\vec{r}) = E_r(r)\hat{r}$

$$E_r(r) = \frac{Q(r)}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \begin{cases} \frac{A r^2 (5a - 4r)}{20\,\varepsilon_0}; & r \leq a \\ \frac{A a^5}{20\,\varepsilon_0 r^2}; & r > a \end{cases}$$

3. Il potenziale elettrostatico è:

$$V(r) = \int_r^\infty E_r(r')\,dr' = \begin{cases} \frac{A(3r^4 - 5ar^3 + 5a^4)}{60\,\varepsilon_0}; & r \leq a \\ \frac{A a^5}{20\,\varepsilon_0 r}; & r > a \end{cases}$$

SOLUZIONE ESERCIZIO 2

È possibile utilizzare il T. di Gauss considerando una superficie cilindrica di raggio r ed altezza h:

$\boxed{r < R_1}$

$$\phi_S(\vec{E}) = \int_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = E\, 2\pi r h = \frac{Q_{INT}}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = 0$$

$\boxed{R_1 < r < R_2}$

$$\phi_S(\vec{E}) = 2\pi r h E = \frac{\sigma_1 2\pi R_1 h}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow E = \frac{\sigma_1 R_1}{\varepsilon_0 r}$$

$\boxed{r > R_2}$

$$\phi_S(\vec{E}) = 2\pi r h E = \frac{2\pi h}{\varepsilon_0}(\sigma_1 R_1 + \sigma_2 R_2)$$

$$\Rightarrow E = \frac{\sigma_1 R_1 + \sigma_2 R_2}{\varepsilon_0 r}$$

Per il calcolo del potenziale

$\boxed{r < R_1}$

$$\int_{V(0)}^{V(r)} dV = -\int_0^r E\, dr' \Rightarrow V(r) - V(0) = 0 \Rightarrow V(r) = \text{cost}$$

$\boxed{R_1 < r < R_2}$

$$\int_{V(R_2)}^{V(r)} dV = -\int_{R_2}^{r} E\, dr' = -\frac{\sigma_1 R_1}{\varepsilon_0}\int_{R_2}^{r} \frac{1}{r'}\, dr' = -\frac{\sigma_1 R_1}{\varepsilon_0} \ln\left(\frac{r}{R_2}\right)$$

$\boxed{r > R_2}$

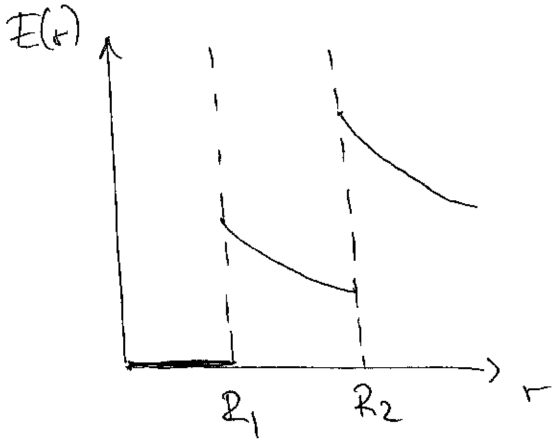
$$\int_{V(R_2)}^{V(r)} dV = -\int_{R_2}^{r} E\, dr' = -\frac{\sigma_1 R_1 + \sigma_2 R_2}{\varepsilon_0} \ln\left(\frac{r}{R_2}\right) = V(r) - V(R_2)$$

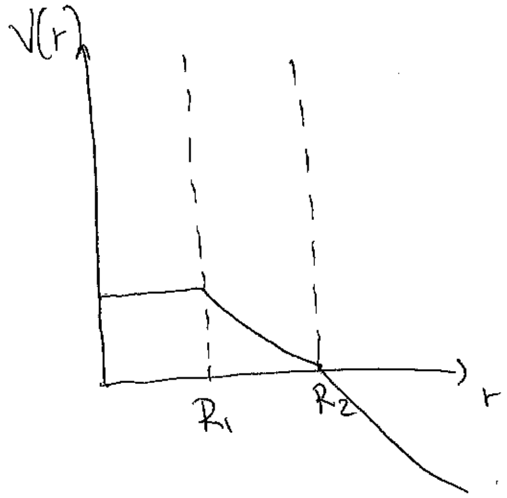
$$\Rightarrow V(r) = -\left(\frac{\sigma_1 R_1 + \sigma_2 R_2}{\varepsilon_0}\right) \ln\left(\frac{r}{R_2}\right) + \cancel{V(R_2)}^{\,0}$$

Imponendo la continuità del ~~campo~~ potenziale determiniamo la costante

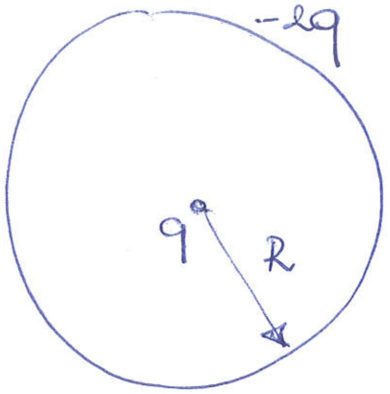
$$\text{cost} = V(R_1) = -\frac{\sigma_1}{\varepsilon_0} R_1 \ln\left(\frac{R_1}{R_2}\right)$$

Dunque gli andamenti del campo elettrico e del potenziale sono





SOLUZIONE ESERCIZIO 3



CONSIDERIAMO I CAMPI GENERATI DALLE DUE CARICHE

1. LA CARICA q POSTA AL CENTRO GENERA UN CAMPO RADIALE, DIRETTO VERSO L'ESTERNO

$$|\vec{E}_q| = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}, \quad r > 0$$

2. LA CARICA CON DISTRIBUZIONE SFERICA GENERA ANCHE ESSA UN CAMPO RADIALE, MA DIRETTO VERSO IL CENTRO

USIAMO IL TEO. DI GAUSS

$$\Phi_\Sigma(\vec{E}_{-2q}) = \int_\Sigma d\vec{s}\cdot\vec{E}_{-2q} = |\vec{E}_{-2q}|\,4\pi r^2 = \frac{Q_{int}}{\varepsilon_0} = \frac{-2q}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow |\vec{E}_{-2q}| = \left|\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{-2q}{r^2}\right|, \quad r > R$$

IN MODULO $|\vec{E}_{-2q}| > |\vec{E}_q| \quad \forall\, r > R \Rightarrow E_{TOT} \neq 0,\ r > R$

DOBBIAMO DUNQUE CERCARE IL PUNTO 6 ALL' INTERNO, USIAMO ANCORA GAUSS

$$\Phi_\Sigma(\vec{E}_{-2q}) = \int_\Sigma d\vec{s}\cdot\vec{E}_{-2q} = |\vec{E}_{-2q}|\,4\pi r^2 = \frac{Q(r)}{\varepsilon_0}$$

dove

$$Q(r) = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$$

$$\rho = \frac{Q_{TOT}}{\frac{4}{3}\pi R^3} = \frac{-2q}{4/3\,\pi R^3} \Rightarrow Q(r) = 4/3\,\pi r^3 \rho = \frac{\cancel{4/3\pi} r^3\, Q_{TOT}}{\cancel{4/3\pi} R^3}$$

$$\Rightarrow Q(r) = -2q\left(\frac{r}{R}\right)^3$$

DA CUI

$$\left|\vec{E}_{-2q}\right| = \left|\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{-2q\, r}{R^3}\right)\right|$$

IMPONIAMO CHE IL CAMPO TOTALE SIA NULLO IN $r = r_0$

$$\vec{E}_q + \vec{E}_{-2q} = \vec{0} \iff \left|\vec{E}_q + \vec{E}_{-2q}\right| = 0$$

$$\Longrightarrow \cancel{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}} \frac{q}{r_0^2} = \cancel{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}} \frac{2q\, r_0}{R^3}$$

$$r_0^3 = \frac{R^3}{2} \Longrightarrow r_0 = \frac{1}{\sqrt[3]{2}} R \simeq 2.38 \text{ cm}$$