Tutorato del 13/05/2021

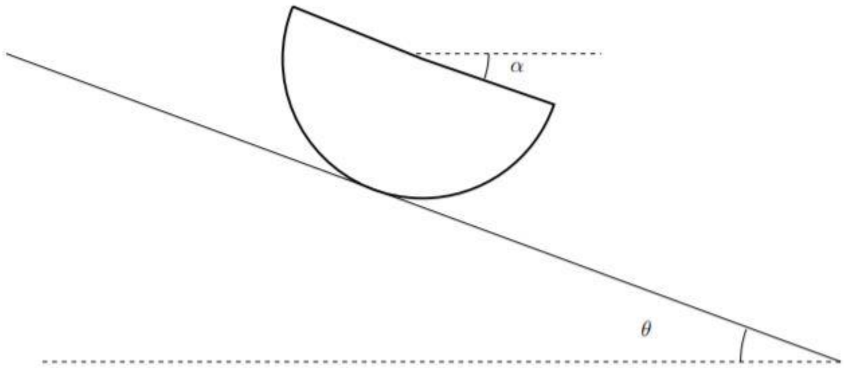
Problema 1

Un cilindro ruota e trasla su un piano orizzontale. La velocità del suo centro di massa è $\vec{V} = V\hat{e}_x$ mentre la su velocità angolare è $\vec{\omega} = \omega\hat{e}_z$. Calcolare la velocità totale $\vec{v}$ di un punto qualunque del cilindro. In quali punti la velocità è massima e in quali è minima?

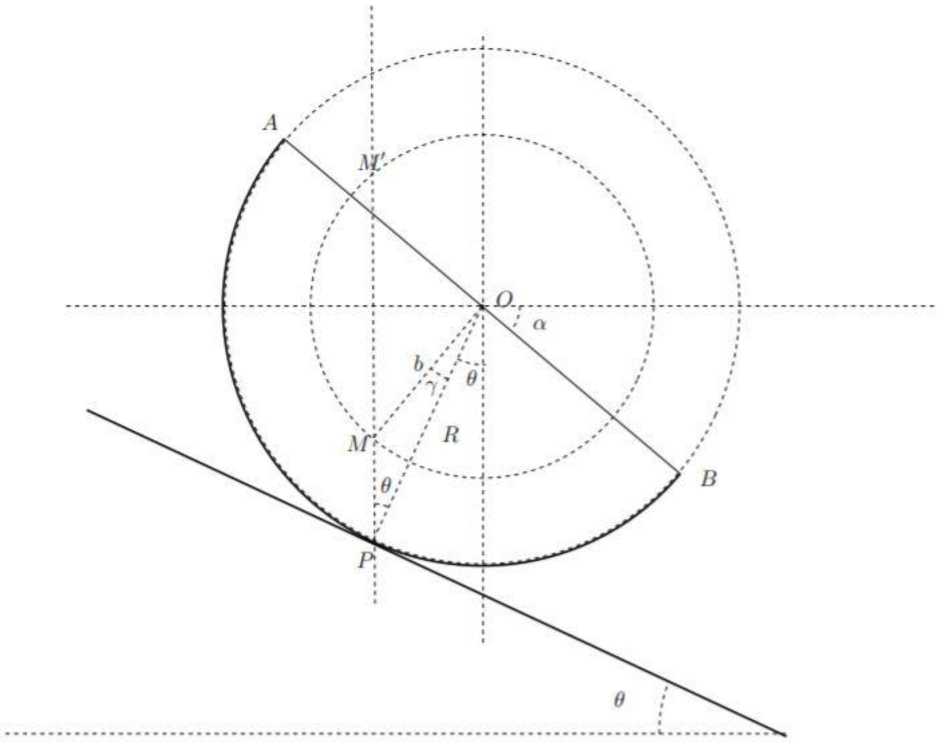
Problema 2

La metà di un cilindro omogeneo di raggio R, massa m e altezza h è appoggiato su un piano obliquo come in figura ed è libero di ruotare senza strisciare. Potete indicare con b la distanza del centro di massa dall'asse del cilindro.

1. Calcolare l'inclinazione α del cilindro nella posizione di equilibrio in funzione di θ, e l'angolo massimo θ^* per il quale l'equilibrio è possibile (vedere seconda figura).
2. Se $\theta = 0$, partendo dalla posizione di equilibrio per quale velocità angolare iniziale minima il corpo si capovolge?



<u>Per rispondere alla prima domanda rifarsi alla seguente costruzione:</u>


A
M'
O
α
b
γ
θ
M
R
θ
B
P
θ

Soluzione Problema 1

Ogni punto sul cilindro avrà una velocità costituita da un contributo dovuto alla traslazione del centro di massa e di un contributo dovuto alla velocità tangenziale di rotazione. Quindi si può scrivere:

$$\vec{v} = \vec{V} + \vec{v}_{tan}$$

La velocità tangenziale dipende dal raggio di rotazione (che quindi a sua volta dipende dalla posizione del centro di massa) e dalla velocità angolare. Chiamiamo $\vec{r}_{cm}$ la posizione del centro di massa e $\vec{r}$ la posizione del punto di cui vogliamo calcolare la velocità. La velocità tangenziale è data dal prodotto vettoriale della velocità angolare per il raggio di rotazione, cioè:

$$\vec{v}_{tan} = \vec{\omega} \wedge (\vec{r} - \vec{r}_{cm}) = \begin{pmatrix} \hat{e}_x & \hat{e}_y & \hat{e}_z \\ 0 & 0 & \omega \\ x - x_{cm} & y - y_{cm} & z - z_{cm} \end{pmatrix} = (-\omega(y - y_{cm}), \omega(x - x_{cm}), 0)$$

Quindi si ha che la velocità totale è:

$$\vec{v} = \vec{V} + \vec{v}_{tan} = \begin{cases} -\omega(y - y_{cm}) + V \\ \omega(x - x_{cm}) \\ 0 \end{cases}$$

Ora dobbiamo calcolare massimi e minimi della velocità totale. Per farlo, calcoliamo il suo modulo quadro:

$$v^2 = V^2 + \omega^2(y - y_{cm})^2 - 2V\omega(y - y_{cm}) + \omega^2(x - x_{cm})^2$$

E cerchiamo le soluzioni che annullano le sue derivate rispetto a x e a y:

$$\frac{\partial v^2}{\partial x} = 2\omega^2(x - x_{cm}) = 0 \;\Rightarrow\; x = x_{cm}$$

$$\frac{\partial v^2}{\partial y} = 2\omega^2(y - y_{cm}) - 2V\omega = 0 \;\Rightarrow\; y = \frac{V}{\omega} + y_{cm}$$

È l'unica soluzione che si trova ed equivale a $v^2 = 0$. Corrisponde quindi al minimo.
Sia R il raggio del cilindro. Se $\left|\frac{V}{\omega}\right| \leq R$ il punto si trova all'interno del cilindro. I punti che soddisfano queste condizioni quindi sono istantaneamente in quiete. Inoltre, altri punti stazionari possono trovarsi sul bordo del cilindro. In coordinate polari, i punti che si trovano sul bordo del cilindro si possono scrivere come:

$$x - x_{cm} = R\cos\theta$$

$$y - y_{cm} = R\sin\theta$$

Sostituendo queste coordinate nell'equazione di v^2 si ottiene:

$$v^2 = V^2 + \omega^2 R^2 - 2V\omega R\sin\theta$$

E derivando rispetto a θ si ha:

$$\frac{\partial v^2}{\partial \theta} = -2V\omega R\cos\theta$$

Le cui soluzioni sono per il minimo:

$$\theta = \frac{\pi}{2}$$

$$v^2 = V^2 + \omega^2 R^2 - 2V\omega R$$

$$x - x_{cm} = 0$$

$$y - y_{cm} = R$$

e per il massimo:

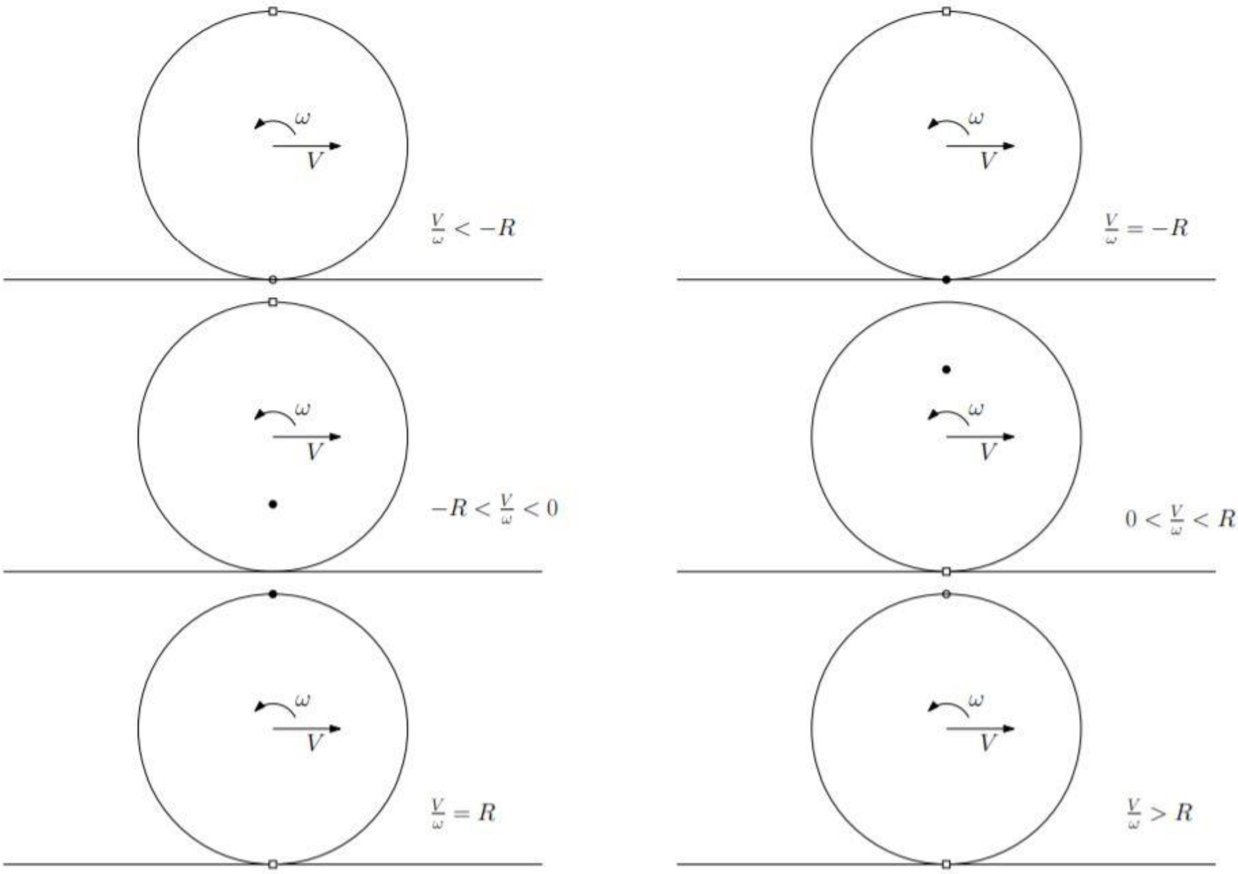
$$\theta = \frac{3\pi}{2}$$

$$v^2 = V^2 + \omega^2 R^2 + 2V\omega R$$

$$x - x_{cm} = 0$$

$$y - y_{cm} = -R$$

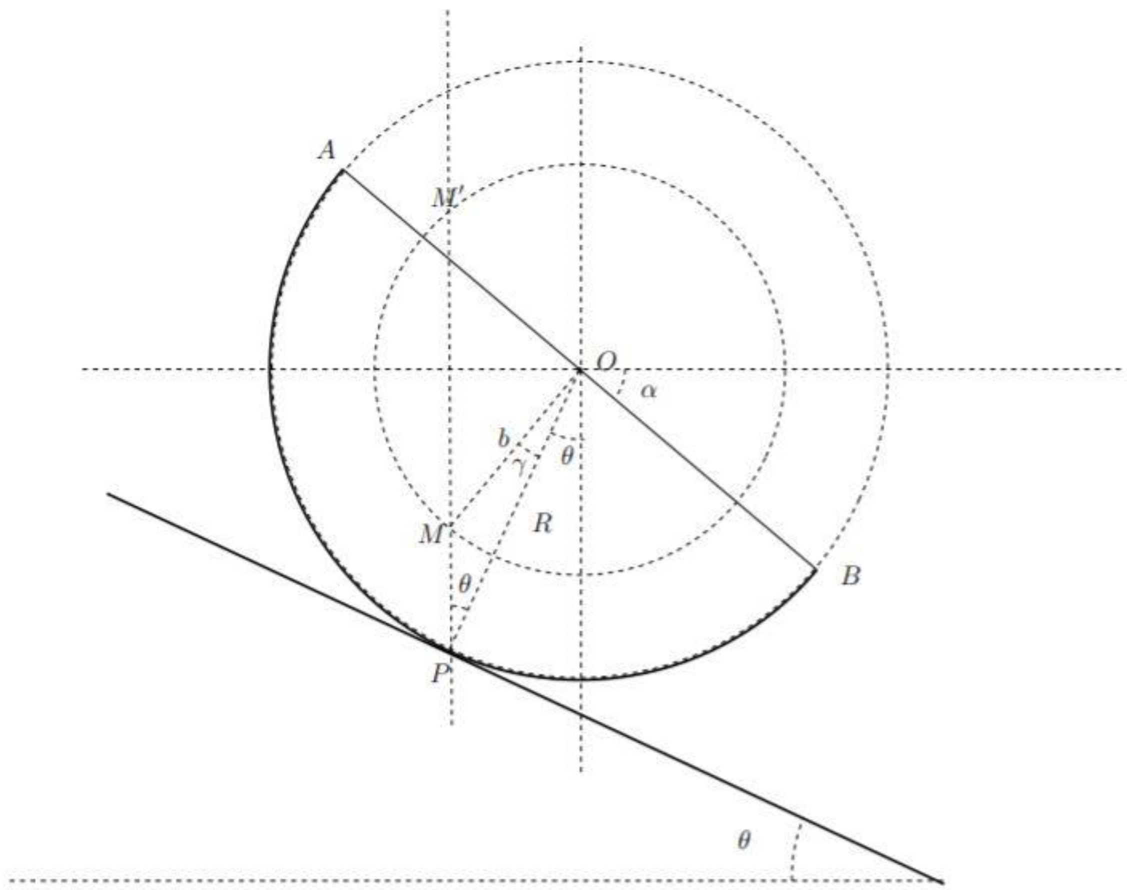
Nella figura sottostante sono riassunti i vari casi trovati a seconda del rapporto $\frac{V}{\omega}$. Il cerchietto vuoto corrisponde al punto di minima velocità in modulo. Il quadratino corrisponde al punto di massima velocità in modulo. Il cerchietto nero mostra un punto che è in quiete. Nel caso del rotolamento puro vale che $V = -\omega R$.



Soluzione Problema 2

Domanda 1

Consideriamo la costruzione in figura.



Prendiamo in esame il triangolo MPO. Dal teorema dei seni viene la seguente relazione:

$$\frac{b}{\sin\theta} = \frac{R}{\sin(\pi-\gamma-\theta)} = \frac{R}{\sin\alpha}$$

Questo dato che $\gamma = \alpha - \theta$. Quindi si ha:

$$R\sin\theta = b\sin\alpha$$

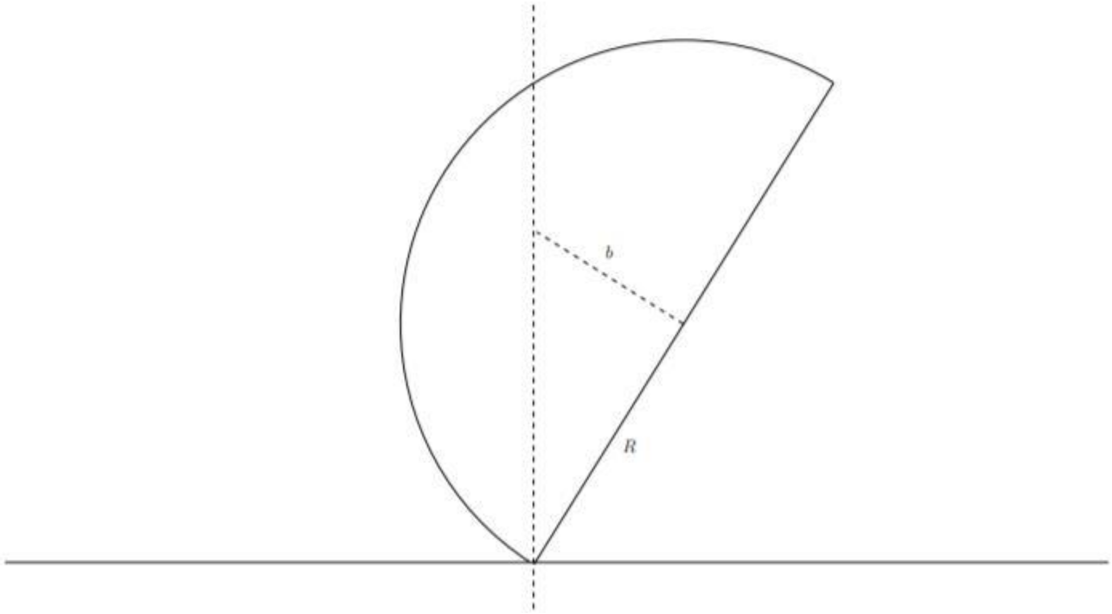
Questo, determina l'angolo α in funzione di θ. Quando avremo soluzioni? Solo se:

$$\sin\theta \leq \frac{b}{R}$$

Per cui, il massimo valore possibile è $\theta^* = \arcsin\frac{b}{R}$. Eplicitando α si ottiene:

$$\alpha = \arcsin\left(\frac{R}{b}\sin\theta\right)$$

In alternativa, guardando la figura, si vede che il valore massimo di α corrisponde a $\alpha + \theta = \frac{\pi}{2}$ (la retta $\overline{MM'}$ diventa tangente alla circonferenza di raggio b). Questa condizione corrisponde a $\sin\theta^* = \frac{b}{R}$. Per piccoli spostamenti rispetto a M del centro di massa la forza di gravità agisce come forza di richiamo, pertanto si tratta di equilibrio stabile. Al contrario, una situazione in cui il centro di massa si trova in M' è di tipo instabile, come si vede nella figura sottostante.



Domanda 2

Affinché si capovolga, il corpo dovrà superare l'altezza massima del centro di massa, ovvero la condizione riportata dalla figura soprastante. L'altezza del centro di massa rispetto al terreno, in questo caso, è:

$$h_f = \sqrt{b^2 + R^2}$$

Imponendo la conservazione dell'energia si ha:

$$\frac{1}{2} I_P \omega_0^2 + mg(R - b) = mg\sqrt{b^2 + R^2}$$

Dove I_P è il momento di inerzia del mezzo cilindro rispetto al punto di contatto nella configurazione iniziale. Ricavando la velocità angolare si ottiene:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2mg}{I_P}(\sqrt{b^2 + R^2} - R - b)}$$

Proviamo a calcolare I_P. Il momento di inerzia di un cilindro intero rispetto al suo asse vale:

$$I_C = \frac{1}{2} M_C R^2$$

Mentre quello di metà cilindro rispetto allo stesso asse sarà:

$$I_O = \frac{1}{2} mR^2$$

Dove naturalmente vale che $m = \frac{M_C}{2}$. Usando il teorema di Steiner si trova il momento di inerzia rispetto a un asse passante per il centro di massa:

$$I_{CM} = I_O - mb^2$$

Infine, usando di nuovo il teorema si trova il momento di inerzia per un asse passante dal punto di contatto iniziale:

$$I_P = I_{CM} + m(R - b)^2 = \frac{1}{2} mR^2 - mb^2 + m(R - b)^2 = \frac{1}{2} mR^2 + mR(R - 2b)$$