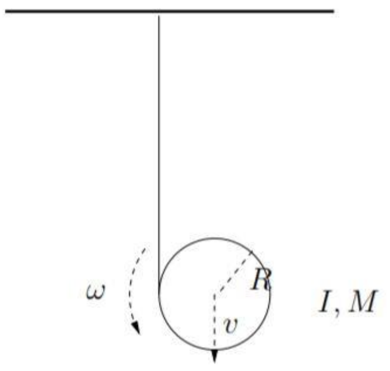
Tutorato – 11/05/2021

Problema 1

Un cilindro viene lanciato su un piano con coefficienti di attrito μ_s e μ_d. Il cilindro ha raggio R, e la massa al suo interno è distribuita con una densità dipendente solo dalla distanza dall'asse. Inizialmente il moto è di pura traslazione. Calcolare in funzione del tempo la velocità del centro di massa e quella angolare. Per quale distribuzione di massa la velocità finale è minima?

Problema 2

Calcolare l'accelerazione del cilindro in figura, attorno al quale è avvolto un filo inestensibile e privo di massa che si srotola durante la caduta.



Problema 3

Un cilindro ruota senza strisciare su un piano inclinato di un angolo α. Calcolare l'accelerazione del suo centro di massa.

Soluzione Problema 1

Inizialmente si ha una forza di attrito data da $\mu_d Mg$. Le equazioni del moto sono:

$$M\dot{v} = -\mu_d Mg$$

$$I\dot{\omega} = \mu_d MgR$$

La velocità diminuisce linearmente nel tempo, mentre la velocità angolare aumenta. Integrando le due equazioni precedenti e immaginando che il cilindro parta con velocità traslazionale v_0 si ha:

$$v = v_0 - \mu_d gt$$

$$\omega = \frac{\mu_d MgR}{I}t$$

Diciamo che si arriva a un tempo t^* in cui $v = \omega R$ cioè la condizione di rotolamento puro. Mettendo insieme le precedenti condizioni si ottiene:

$$v_0 - \mu_d gt^* = \frac{\mu_d MgR^2}{I}t^*$$

Da cui si trova che

$$t^* = \frac{v_0}{\mu_d g\left(1 + \frac{MR^2}{I}\right)}$$

Le velocità tangenziale e radiale da questo istante in poi rimangono costanti:

$$v = \omega R = \frac{\frac{MR^2}{I}}{1 + \frac{MR^2}{I}}v_0$$

Per minimizzare la velocità finale dovremo rendere minimo il rapporto $\frac{MR^2}{I}$. Il valore massimo di I si ottiene se la massa è concentrata sulla superficie laterale del cilindro, per cui $I = MR^2$. In questo caso:

$$v = \omega R = \frac{1}{2}v_0$$

Mentre per un cilindro omogeneo vale $I = \frac{MR^2}{2}$ e dunque:

$$v = \omega R = \frac{2}{3}v_0$$

Infine, se tutta la massa è concentrata sull'asse $I = 0$ e $v = \omega R = v_0$. L'interpretazione di questo caso limite è che in assenza di inerzia angolare il cilindro si mette immediatamente a ruotare senza strisciare, come si può verificare dalla formula per t^*.

Soluzione Problema 2

Per il moto verticale del centro di massa si ha la seguente equazione cardinale:

$$M\ddot{y} = -Mg + T$$

Mentre per la rotazione si ha:

$$I\ddot{\theta} = -RT$$

dove I è il momento di inerzia del cilindro rispetto al suo centro di massa, $I = \frac{MR^2}{2}$. La condizione di rotolamento puro sul filo da:

$$\ddot{y} = R\ddot{\theta}$$

Da cui:

$$T = -\frac{I}{R^2}\ddot{y}$$

E sostituendo nella prima equazione si trova infine:

$$\left(M + \frac{I}{R^2}\right)\ddot{y} = -Mg \;\;\Rightarrow\;\; \ddot{y} = \frac{-MR^2}{MR^2 + I}g = -\frac{2}{3}g$$

Soluzione Problema 3

Poniamo l'origine degli assi nello spigolo dove il piano inclinato si congiunge col piano orizzontale. Il centro di massa del cilindro è individuato da un vettore $\vec{r}$. Il cilindro ruota senza strisciare con una velocità angolare $\omega(t)$ che varia nel tempo. L'energia meccanica totale del cilindro è data da:

$$E = \frac{1}{2}M\dot{r}^2 + \frac{1}{2}I\dot{\theta}^2 - Mgr\sin\alpha$$

La condizione di rotolamento puro è, (sia R il raggio del cilindro) che $\dot{\theta}R = \dot{r}$. Quindi si ha che:

$$E = \frac{1}{2}M\dot{r}^2 + \frac{1}{2}I\frac{\dot{r}^2}{R^2} - Mgr\sin\alpha$$

E derivando rispetto al tempo il risultato deve essere nullo per la conservazione dell'energia meccanica totale:

$$\dot{E} = M\ddot{r}\dot{r} + I\frac{\ddot{r}\dot{r}}{R^2} - Mg\dot{r}\sin\alpha = 0$$

$$\Rightarrow\;\; \ddot{r} = \frac{Mg\sin\alpha}{M + \frac{I}{R^2}}$$