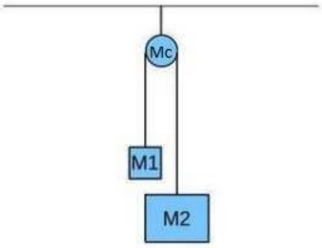
Tutorato del 06/05/2021

Problema 1

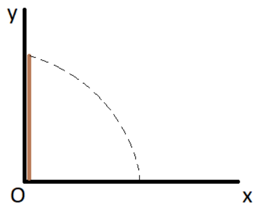
Consideriamo il sistema della macchina di Atwood. Due masse $m_1 = 8\ kg$ e $m_2 = 10\ kg$ sono appese mediante a una carrucola tramite una fune ideale. La carrucola ha una massa $m_c = 3\ kg$ e un raggio $r = 15\ cm$. Trovare l'accelerazione del centro di massa e le tensioni delle funi.



Problema 2

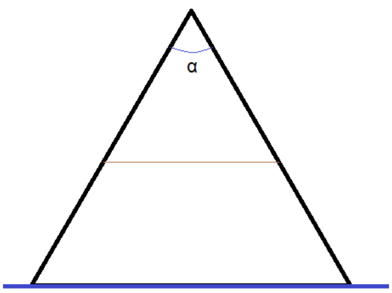
Un'asta di lunghezza $l = 1.5\ m$ e massa $m = 0.5\ kg$ è appoggiato a una parete in posizione verticale. Il suo estremo inferiore è fissato al suolo. In un certo istante, il manico cade. Trovare la velocità con cui il suo estremo libero tocca il suolo.

[Suggerimento: scrivere l'accelerazione angolare sotto forma di derivata. La costante di integrazione si calcola imponendo le condizioni iniziali sull'angolo e sulla velocità angolare.]



Problema 3

Una scala 'a libretto' `e costituita da due bracci uguali poggiati al suolo che formano un angolo $\alpha = 60°$. A metà altezza le due parti della scala sono trattenute da un filo inestensibile di massa trascurabile che le collega; sapendo che ciascuna delle due parti della scala ha massa $m = 4.5\ kg$ e che ogni braccio misura $L = 2\ m$ e che non vi é attrito fra la scala e il suolo, determinare il modulo della tensione del filo**.**



Soluzione Problema 1

Se la carrucola ha una massa non trascurabile le tensioni della fune vanno distinte, perché non sono più uguali. Queste tensioni esercitano momenti torcenti sulla carrucola che vanno tenuti in considerazione. Se la massa 2 è quella che scende e la massa 1 è quella che sale, abbiamo le seguenti equazioni del moto:

$$\begin{cases} m_2 g - T_2 = m_2 a \\ T_1 - m_1 g = m_1 a \end{cases}$$

La tensione 2 tende a far girare la carrucola in senso orario, la tensione 1 in senso antiorario. Le carrucola pertanto è soggetta a due momenti contrapposti che hanno però lo stesso braccio, in quanto le tensioni si applicano entrambe al bordo della carrucola. I due momenti vanno sottratti e il loro risultato sarà dato dal momento d'inerzia per l'accelerazione angolare:

$$T_2 r - T_1 r = I\alpha$$

Se la carrucola è un disco, allora il suo momento di inerzia relativo all'asse passante per il centro è:

$$I = \frac{1}{2} m_c r^2 = 0.034\ kg\ m^2$$

L'accelerazione angolare, in funzione di quella tangenziale, è $\alpha = \frac{a}{r}$ e quindi l'equazione dei momenti diventa:

$$T_2 r - T_1 r = \frac{1}{2} m_c r^2 \frac{a}{r} \ \Rightarrow\ T_2 - T_1 = \frac{1}{2} m_c a$$

Con le prime due equazioni si hanno 3 equazioni in 3 incognite. Le soluzioni sono:

$$\begin{cases} a = g \dfrac{m_2 - m_1}{m_2 + m_1 + \frac{m_c}{2}} = 1\ m/s \\ T_1 = m_1 g \dfrac{2m_2 + \frac{m_c}{2}}{m_2 + m_1 + \frac{m_c}{2}} = 86\ N \\ T_2 = m_2 g \dfrac{2m_1 + \frac{m_c}{2}}{m_2 + m_1 + \frac{m_c}{2}} = 88\ N \end{cases}$$

Soluzione Problema 2

L'unica forza agente è la forza peso. La risultante dei momenti è data dal prodotto vettoriale della forza peso per la lunghezza della scopa, e per la legge fondamentale della dinamica rotazionale questo sarà uguale all'accelerazione del punto estremo per il suo momento di inerzia:

$$mgr = I\alpha$$

Con $I = \frac{1}{3} m l^2$ e $r = \frac{l}{2}\sin\theta$ dove θ è l'angolo fra l'asta e la verticale e dove si è assunto che la forza peso agisca sul centro di massa della scopa. Andando a sostituire si ha:

$$mg\frac{l}{2}\sin\theta = \frac{1}{3} m l^2 \frac{d^2\theta}{dt^2} \ \Rightarrow\ \frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{3g}{2l}\sin\theta$$

Inoltre, sappiamo che:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \frac{d\omega}{dt} = \frac{d\omega}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \frac{d\omega}{d\theta}\omega \ \ per\ cui\ si\ ha\ \frac{d\omega}{d\theta}\omega = \frac{3g}{2l}\sin\theta$$

Cioè $\omega d\omega = \frac{3g}{2l}\sin\theta\, d\theta$ e integrando membro a membro si ottiene:

$$\frac{1}{2}\omega^2 = -\frac{3g}{2l}\cos\theta + C$$

Il valore della costante si calcola imponendo le condizioni iniziali e cioè la posizione dell'asta verticale, che significa: $\cos\theta = 1$ e $\omega = 0$. Cioè:

$$0 = -\frac{3g}{2l} + C \;\;\Rightarrow\;\; C = \frac{3g}{2l}$$

Quindi si ottiene:

$$\frac{1}{2}\omega^2 = -\frac{3g}{2l}\cos\theta + \frac{3g}{2l}$$

Quando l'asta raggiunge la posizione orizzontale vale che $\theta = 90° \;\; e \;\; \cos\theta = 0$. Quindi si ha:

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{l}} = 4.43\, rad/s$$

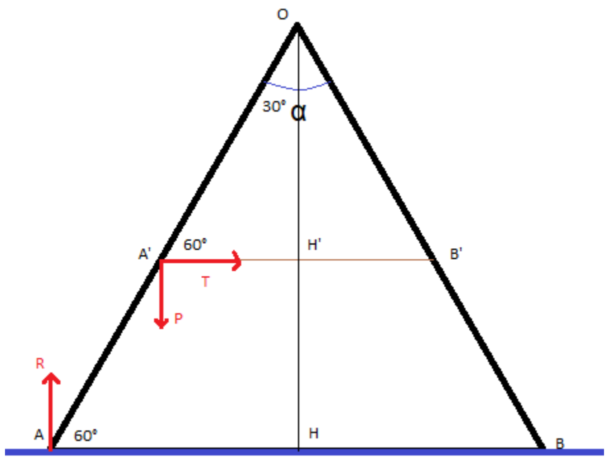
E la velocità tangenziale è: $v = \omega l = 6.65\, m/s$

Come si nota, trascurando gli attriti, la velocità non dipende dalla massa ma solo dalla lunghezza dell'asta.

Soluzione Problema 3

Possiamo pensare che il centro di massa di ogni braccio della scala si trovi proprio dove è agganciato il filo. Su questi punti agiscono quindi la forza peso di ogni braccio e la tensione del filo. Ogni braccio è un'asta che ruota attorno al vertice superiore. Tutto il sistema è in equilibrio. Chiamiamo O il perno superiore, A e B i punti in cui la scala tocca il suolo e A' e B' i punti in cui è fissato il filo.

Su ogni braccio agiscono le seguenti forze: la forza peso P del braccio (che agisce sul centro di massa posto a metà di ogni braccio, che coincide coi punti A' e B'), la reazione vincolare R nei punti A e B e la tensione del filo T nei punti A' e B'. Calcoleremo i momenti relativi a queste forze rispetto al punto O e questo è il motivo per cui non consideriamo la reazione vincolare di questo punto.



Essendo il sistema in equilibrio, la risultante di tutto i momenti delle forze esterne sarà zero, cioè

$$\sum_i M_i = 0$$

Fissiamo, come direzione positiva dei momenti, quella entrante nel foglio. Per il braccio OA e OB, si ha, rispettivamente:

$$\begin{cases} LR_A \cos\alpha - \frac{L}{2} P_A \cos\alpha - \frac{L}{2} T \sin\alpha = 0 \\ -LR_B \cos\alpha + \frac{L}{2} P_B \cos\alpha + \frac{L}{2} T \sin\alpha = 0 \end{cases}$$

Consideriamo ora l'equilibrio sulle sole forze verticali:

$$R_A + R_B - P_A - P_B = 2R - 2P = 0 \;\; \Rightarrow \;\; R = P = mg$$

Dato che $R_A = R_B \; e \; P_A = P_B$ per ragioni di simmetria. Quindi, sostituendo, ad esempio, nella prima equazione, si ottiene:

$$Lmg \cos\alpha - \frac{Lmg}{2} \cos\alpha - \frac{L}{2} T \sin\alpha = 0 \;\; \Rightarrow \;\; \frac{Lmg}{2} \cos\alpha = \frac{L}{2} T \sin\alpha \;\; \Rightarrow \;\; T = \frac{mg \cos\alpha}{\sin\alpha}$$

$$= \frac{4.5\;kg \;\cdot 9.8 \frac{m}{s^2} \cdot \frac{1}{2}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = 25.5\;N$$