Tutorato del 04/05/2021

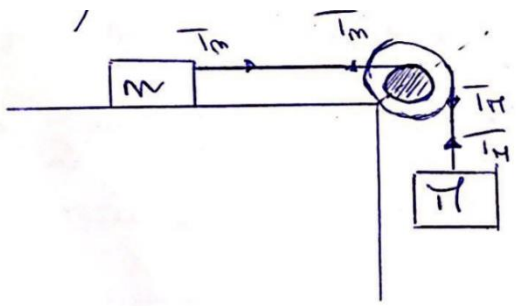
Problema 1

Su un piano orizzontale è posata una massa m=10 kg. Essa viene messa in movimento tramite un filoche si avvolge su una puleggia di raggio r=20 cm. Questa è messa in rotazione dalla discesa di una massa M=4 kg che scende sotto la sola azione della forza peso. La massa M è collegata a una puleggia di raggio r=50 cm, coassiale e rigidamente fissata alla puleggia precedente. Il momento di inerzia delle due pulegge rispetto al comune asse di rotazione è I=6 kg m^2. Calcolare:

a) la velocità v di M dopo che è scesa di h= 1 m;

b) le tensioni dei due fili durante il movimento;

c) il valore di v se tra la massa m e il piano ci fosse un coefficiente di attrito mu=0.25

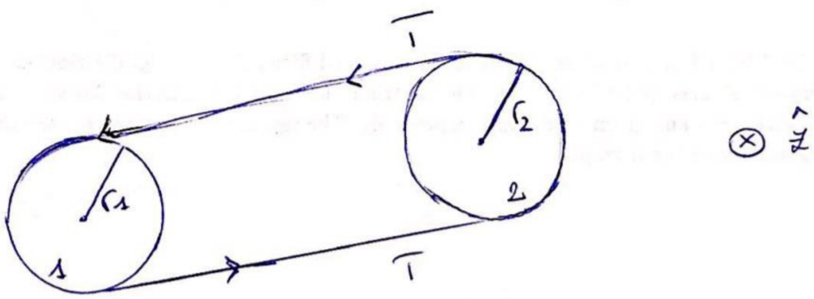


Problema 2

Due dischi con masse m1=5 kg e m2=20 kg e raggi r1=10 cm e r2=20 cm sono connessi come in figura da una cinghia indeformabile. All'asse del primo disco è connesso un motore che può fornire un momento costante M1=8 N m, mentre sull'asse del secondo disco agisce un momento frenante costante M2=7 N m. Al tempo t=0 il motore comincia ad agire facendo ruotare il primo disco. Calcolare:

a) la velocità angolare del secondo disco al tempo t=5 s;

b) quanto lavoro è stato fornito dal motore al tempo t=5 s;



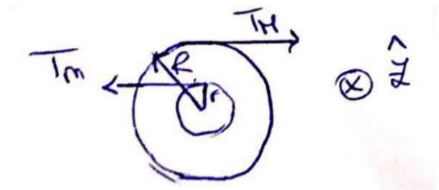
Soluzione 1

Scriviamo il secondo principio della dinamica per le masse m e M:

$$\begin{cases} ma_m = T_m = mr\alpha \\ Ma_M = Mg - T_M = MR\alpha \end{cases}$$

Dove a_m e a_M sono le accelerazioni lineari relative alle due masse, r e R sono i raggi delle carrucole collegate rispettivamente alle masse m e M, mentre T_m e T_M sono le tensioni rispettivamente relative alle masse m e M. Infine, α è l'accelerazione angolare, che è uguale per entrambe le carrucole perché queste sono fissate rigidamente l'una all'altra.

Ora scriviamo l'equazione dei momenti per il sistema della doppia carrucola, considerando l'asse $\hat{z}$ positivo come la direzione perpendicolare ed entrante nel foglio:



$$RT_M - rT_m = I\alpha$$

Dalle prime due equazioni ricaviamo le incognite T_m e T_M e le sostituiamo nella terza per ricavare α:

$$\begin{matrix} T_m = mr\alpha \\ T_M = Mg - MR\alpha \end{matrix} \;\Rightarrow\; RMg - R^2M\alpha - r^2m\alpha = I\alpha \;\Rightarrow\; \alpha(I + mr^2 + MR^2) = RMg$$

$$\Rightarrow\; \alpha = \frac{RMg}{(I + mr^2 + MR^2)} \cong 2.65\frac{rad}{s^2}$$

Per calcolare la velocità ricaviamo prima il tempo, considerando che ci troviamo di fronte a un moto uniformemente accelerato:

$$y(t) = \frac{1}{2}at^2 \;\Rightarrow\; h = \frac{1}{2}a_M t^2 \;\Rightarrow\; t = \sqrt{\frac{2h}{\alpha R}} \cong 1.23\ s$$

Con $a_M = \alpha R$. Quindi, per la velocità abbiamo:

$$v(t) = a_M t = \alpha R t \cong 1.63\frac{m}{s}$$

Per quanto riguarda le tensioni, invece, si trova:

$$T_m = mr\alpha \cong 5.3\ N$$
$$T_M = Mg - MR\alpha \cong 33.9\ N$$

Ora vediamo il caso in cui la massa m sia soggetta ad una forza d'attrito. In questo caso, le equazioni del moto precedenti, le due equazioni della forze e quella relativa ai momenti, cambiamo in questo modo:

$$\begin{cases} T'_m - \mu mg = mr\alpha' \\ Mg - T'_M = MR\alpha' \\ RT'_M - rT'_m = I\alpha' \end{cases}$$

Abbiamo aggiungo gli apici alle tensioni e all'accelerazione angolare per distinguerli dal caso precedente. Ora risolviamo seguendo lo stesso procedimento adottato nel caso precedente:

$$\begin{array}{r} T'_m = mr\alpha' + \mu mg \\ T'_M = Mg - MR\alpha' \end{array} \Rightarrow RMg - r\mu mg - R^2 M\alpha' - r^2 m\alpha' = I\alpha'$$

$$\Rightarrow \alpha'(I + mr^2 + MR^2) = RMg - r\mu mg$$

$$\Rightarrow \alpha = \frac{RMg - r\mu mg}{(I + mr^2 + MR^2)} \cong 1.99 \frac{rad}{s^2} < \alpha$$

E per il tempo:

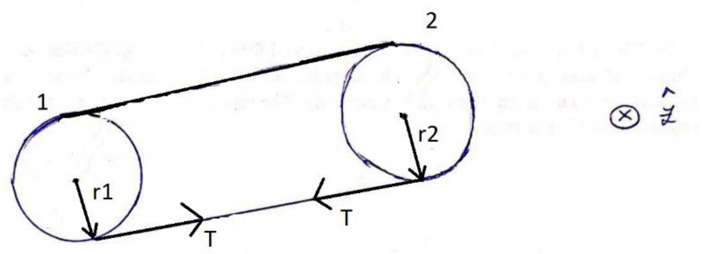
$$y(t) = \frac{1}{2}\alpha' t'^2 \Rightarrow h = \frac{1}{2}\alpha'_M t'^2 \Rightarrow t' = \sqrt{\frac{2h}{\alpha' R}} \cong 1.42\, s$$

Con $\alpha'_M = \alpha' R$. Quindi, per la velocità abbiamo:

$$v'^{(t)} = \alpha'_M t' = \alpha' R t' \cong 1.41 \frac{m}{s} \quad \blacksquare$$

Soluzione 2

La tensione della cinghia è la stessa in modulo. I vettori della tensione sono diretti lungo la cinghia e con versi opposti, applicati ciascuno in corrispondenza del punto in cui la cinghia è tangente ai dischi.



Consideriamo che i due dischi ruotino in senso orario. Il momento totale di ogni disco sarà positivo e diretto lungo z con verso entrante nel foglio. Il disco 1 'tira' la cinghia, per cui la tensione su questo disco sarà diretta lungo la cinghia e verso il disco due. Tuttavia, anche il disco 2, con la sua azione frenante, 'tira' la cinghia e la tensione sarà diretta lungo la cinghia verso il disco 1 (in generale, la tensione si oppone sempre alla forza che la tira la corda. Si pensi, ad esempio, a una massa appesa a un filo).
Scriviamo ora le equazioni dei momenti relative ai due dischi, ricordando che la direzione delle z positive è quella entrante nel foglio:

$$\begin{cases} 1: \quad M_1 - Tr_1 = I_1\alpha_1 = \frac{1}{2}m_1 r_1^2 \alpha_1 \\ 2: \quad -M_2 + Tr_2 = I_2\alpha_2 = \frac{1}{2}m_2 r_2^2 \alpha_2 \end{cases}$$

Ricaviamo T dalla seconda equazione e sostituiamo la sua espressione nella prima equazione:

$$T = \frac{1}{2}m_2 r_2 \alpha_2 + \frac{M_2}{r_2}$$

$$M_1 - \frac{1}{2}m_2 r_1 r_2 \alpha_2 - \frac{M_2 r_1}{r_2} = \frac{1}{2}m_1 r_1^2 \alpha_1 \qquad (1)$$

Ora consideriamo un punto sulla cinghia che cinge il disco 1. In un certo intervallino di tempo esso avrà compiuto un archetto di circonferenza (dato dall'apertura angolare per il raggio). Un punto qualsiasi sul disco 2 avrà compiuto un arco di uguale misura. Pertanto, possiamo scrivere:

$$r_1 d\theta_1 = r_2 d\theta_2$$

Se dividiamo per l'intervallino di tempo dt otteniamo:

$$r_1 \frac{d\theta_1}{dt} = r_2 \frac{d\theta_2}{dt} \;\Rightarrow\; r_1\omega_1(t) = r_2\omega_2(t)$$

E derivando di nuovo rispetto al tempo otteniamo:

$$r_1 \frac{d\omega_1}{dt} = r_2 \frac{d\omega_2}{dt} \;\Rightarrow\; r_1\alpha_1 = r_2\alpha_2 \;\Rightarrow\; a_1 = a_2$$

Quindi possiamo dire che l'accelerazione lineare dei dischi è la stessa. Usiamo questo risultato, ovvero $r_1\alpha_1 = r_2\alpha_2$ nell'equazione (1). Otteniamo:

$$M_1 - \frac{1}{2}m_2 r_1^2 \alpha_1 - \frac{M_2 r_1}{r_2} = \frac{1}{2}m_1 r_1^2 \alpha_1 \;\Rightarrow\; \alpha_1 \frac{1}{2} r_1^2 (m_1 + m_2) = M_1 - \frac{M_2 r_1}{r_2} \;\Rightarrow$$

$$\alpha_1 = \frac{M_1 - \frac{M_2 r_1}{r_2}}{\frac{1}{2} r_1^2 (m_1 + m_2)} \cong 36 \frac{rad}{s^2}$$

E quindi possiamo ricavare α_2:

$$\alpha_2 = \frac{\alpha_1 r_1}{r_2} \cong 18 \frac{rad}{s^2}$$

Quindi, la velocità angolare del disco dopo 5 s è:

$$\omega_2(t = 5\,s) = \alpha_2 \cdot t \cong 90 \frac{rad}{s}$$

Il lavoro compiuto dal motore 1 si calcola attraverso l'integrale del momento per lo spostamento angolare compiuto, ovvero:

$$L = \int_{\theta_0}^{\theta_f} M_1 d\theta = M_1 \theta(t - t_0) = M_1 \theta(5\,s)$$

Il moto è rotatorio uniformemente accelerato, quindi:

$$\theta = \frac{1}{2}\alpha t^2$$

E alla fine troviamo:

$$L = M_1 \frac{1}{2}\alpha_1 t^2 \cong 3600\,J \;\blacksquare$$