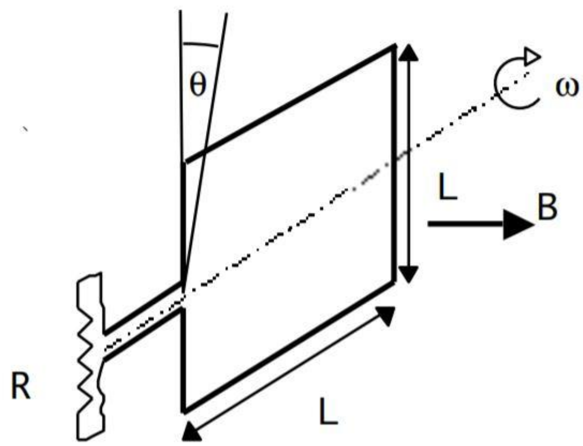
TUTORATO 10 – 17/12/2019

Esercizio 1.

Una spira quadrata di lato L=1 m ruota attorno ad un asse orizzontale con una velocità angolare $\omega=2\pi$ rad/sec. La spira è immersa in un campo magnetico uniforme B=2 T diretto lungo l'asse z, ortogonale all'asse della spira. La spira, di resistenza trascurabile, è connessa a una resistenza di carico di R=0.2 Ω.

Calcolare:

1. La corrente che circola nella spira in funzione del tempo
2. Il momento massimo che agisce sulla spira
3. L'energia dissipata sulla resistenza in 10 secondi
4. La somma in valore assoluto delle cariche che circolano nella spira in 10 secondi



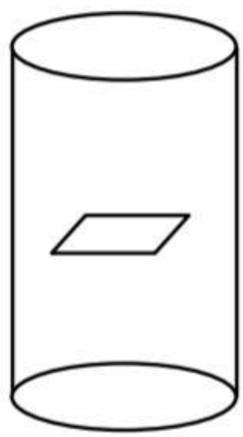
Esercizio 2.

Un solenoide superconduttore cilindrico, di altezza h=10 m e di raggio r=2.5 cm, è costruito con n=1000 spire/m. Il rapporto lunghezza/diametro è tale che il campo B nel solenoide può essere considerato, con ottima approssimazione, quello di un solenoide infinito. Il solenoide viene acceso con una corrente $i = i_0 t$ con i_0=12 A/s, fino a raggiungere la corrente di 120 A.

All'interno del solenoide si trova una piccola spira quadrata di lato l=1.3 cm, giacente su un piano ortogonale all'asse del solenoide, di resistenza R=0.004 Ω (l'effetto della spira è trascurabile per le risposte dei punti 1 e 2).

Calcolare:

1. La Fem del generatore necessaria a fornire la corrente i al solenoide
2. L'energia totale fornita dal generatore
3. Il coefficiente di mutua induzione spira-solenoide
4. La corrente indotta nella spira durante l'accensione del solenoide (trascurando l'autoinduzione della spira)
5. La carica che ha circolato nella spira durante tutto il processo
6. L'energia totale dissipata nella spira



Soluzione Esercizio 1.

Il flusso del campo magnetico B attraverso la spira è

$$\Phi(\mathrm{B}) = \int_S \mathrm{B} \cdot \mathrm{dS} = \mathrm{BL}^2\cos(\alpha) = \mathrm{BL}^2\cos(\omega \mathrm{t})$$

dove α è l'angolo fra la direzione del campo B e la normale alla superficie della spira. Pertanto, la corrente indotta è:

$$\mathrm{i} = \frac{\mathrm{fem}}{\mathrm{R}} = -\frac{1}{\mathrm{R}}\frac{\partial\Phi(\mathrm{B})}{\partial \mathrm{t}} = \frac{\omega \mathrm{BL}^2 \sin \omega \mathrm{t}}{\mathrm{R}} = 62.83 \cdot \sin(2\pi \mathrm{t}) \text{ (1)}$$

Il lavoro fatto dal momento che agisce sulla spira è dW=Mdθ. Quindi, la potenza spesa è pari a $\mathrm{M}\frac{d\theta}{dt} = \mathrm{M}\omega$. La potenza spesa si ritrova in potenza elettrica dissipata sulla resistenza. Per cui si ha:

$$\mathrm{M} = \frac{\mathrm{P}}{\omega} = \frac{\mathrm{Ri}^2}{\omega} = \frac{\omega \mathrm{B}^2\mathrm{L}^4\mathrm{sen}^2\omega \mathrm{t}}{\mathrm{R}} \qquad \mathrm{M}_{\mathrm{max}} = \frac{\omega \mathrm{B}^2\mathrm{L}^4}{\mathrm{R}} = 125.6 \text{ Nm (2)}$$

L'energia dissipata è l'integrale della potenza nei 10 secondi. Il periodo di rotazione della spira è di 1 secondo, per cui l'integrale di $\mathrm{sen}^2(\omega \mathrm{t})$ vale T/2. Quindi, si ha:

$$\mathrm{W} = \int_0^{10} \mathrm{Ri}^2\mathrm{dt} = \frac{\omega^2\mathrm{B}^2\mathrm{L}^4}{\mathrm{R}}\int_0^{10} \mathrm{sen}^2(\omega \mathrm{t})\mathrm{dt} = \frac{\omega^2\mathrm{B}^2\mathrm{L}^4}{\mathrm{R}} 5 = 3.95 \text{ kJ (3)}$$

La legge di Felici permette di calcolare la carica quando è presente un campo magnetico dal flusso variabile che induce una corrente in un circuito. Essa afferma che la differenza tra il flusso del campo magnetico concatenato al circuito nello stato iniziale ed il flusso nello stato finale, divisa per la resistenza del circuito, è pari alla carica totale che attraversa il circuito. In questo caso la carica totale sarà nulla:

$$\mathrm{Q} = \frac{\Phi_1 - \Phi_2}{\mathrm{R}} = 0$$

Infatti, considerando la carica con il segno, visto che il moto è periodico, dopo un numero intero di giri la caricato totale circolata è nulla. Il flusso finale è uguale a quello iniziale.

Tuttavia, il problema chiede la somma delle cariche fluite in valore assoluto. Ogni mezzo giro, il flusso si inverte, quindi sfruttando ancora la legge di Felici si ha:

$$\mathrm{Q} = \left|\frac{\mathrm{BL}^2 - (-\mathrm{BL}^2)}{\mathrm{R}}\right| + \left|\frac{(-\mathrm{BL}^2) - (\mathrm{BL}^2)}{\mathrm{R}}\right| = 400 \text{ C (4)}$$

Soluzione Esercizio 2.

La resistenza del solenoide è nulla (è un superconduttore), ma il generatore deve fornire comunque una fem per compensare la fem autoindotta nel solenoide al variare della corrente. Per calcolare l'induttanza del solenoide, si può usare l'approssimazione a solenoide infinito:

$$\mathrm{L} = \mu_0 \mathrm{n}^2 \Sigma \mathrm{h} = \mu_0 \mathrm{n}^2 \pi \mathrm{r}^2 \mathrm{h} = 24.74 \text{ mH}$$

Una volta nota l'induttanza, la fem è calcolabile dalla legge di Faraday-Lenz:

$$\text{fem} = \mathrm{L}\frac{d\mathrm{i}}{d\mathrm{t}} = \mu_0 \mathrm{n}^2 \Sigma \mathrm{h} \mathrm{i}_0 = 1.26 \cdot 10^{-6} \cdot 1000^2 \cdot \pi \cdot 0.025^2 \cdot 10 \cdot 12 = 297 \text{ mV} \quad (1)$$

L'energia fornitadal generatore è pari all'energia magnetica accumulata nel solenoide (non c'è energia dissipata in quanto la resistenza del solenoide è nulla):

$$\mathrm{E_G} = \int_0^{\mathrm{t}} \mathrm{P} d\mathrm{t} = \frac{1}{2}\mathrm{L}\mathrm{i}^2 = \frac{1}{2}\mu_0 \mathrm{n}^2 \Sigma \mathrm{h} \cdot \mathrm{i}^2 = \frac{1}{2} \cdot 1.26 \cdot 10^{-6} \cdot 1000^2 \cdot \pi \cdot 0.025^2 \cdot 10 \cdot 120^2 = 178 \text{ J} \quad (2)$$

Il campo magnetico generato dal solenoide è costante sulla superficie della spira. Per cui, il coefficiente di mutua induzione spira-solenoide è:

$$M = \frac{\Phi}{\mathrm{i}} = \frac{\mu_0 \mathrm{n} \mathrm{i} \mathrm{l}^2}{\mathrm{i}} = \mu_0 n \mathrm{l}^2 = 1.26 \cdot 10^{-6} \cdot 1000 \cdot 0.013^2 = 2.1 \cdot 10^{-7} (3)$$

Noto il flusso del campo magnetico che attraversa la spira, la corrente indotta si può scrivere direttamente come:

$$\mathrm{i_s} = \frac{1}{\mathrm{R}}\frac{d\Phi}{dt} = \frac{1}{\mathrm{R}}\frac{d(\mu_0 \mathrm{n} \mathrm{i} \mathrm{l}^2)}{dt} = \frac{\mu_0 \mathrm{n} \mathrm{i}_0 \mathrm{l}^2}{\mathrm{R}} = \frac{1.26 \cdot 10^{-6} \cdot 1000 \cdot 12 \cdot 0.013^2}{0.004} = 0.64 \text{ mA} \quad (4)$$

Avendo la corrente indotta, che è costante, la carica totale che ha circolato nella spira è:

$$\mathrm{Q} = \mathrm{i_s} \mathrm{t} = 6.4 \text{ mC} \quad (5)$$

Che in alternativa può essere calcolata applicando la legge di Felici. Infine, l'energia dissipata si ricava dalla potenza dissipata, che è anch'essa costante:

$$\mathrm{E_s} = R \mathrm{i_s^2} t = 0.004 \cdot (0.64 \cdot 10^{-3})^2 \cdot 10 = 1.64 \cdot 10^{-8} \text{ J} \quad (6)$$