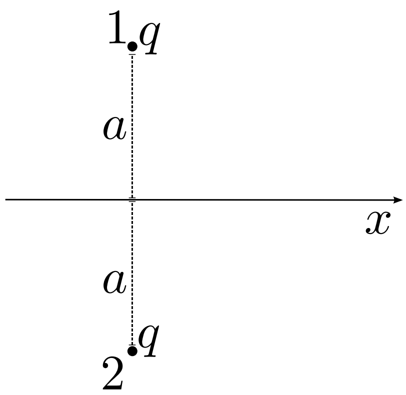
Tutorato Fisica 2
Foglio di Esercizi n. 1

Esercizio 1

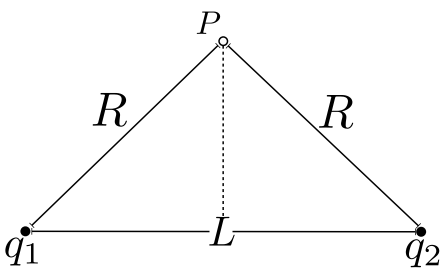
Su di un piano orizzontale sono poste due cariche $q = 1\ \mu$C ad una distanza $2a$ l'una dall'altra, con $a = 0.5$ m. Determinare determinare il punto dell'asse x in cui il campo elettrico raggiunge il valore massimo.

[$x = 0.35$ cm]



Esercizio 2

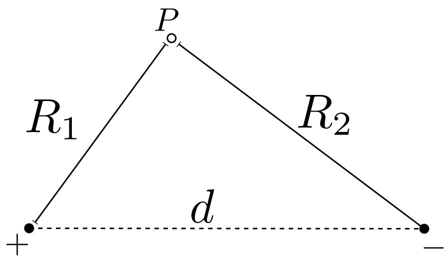
Si considerino due cariche puntiformi di carica $q_1 = q$ e $q_2 = -q$, poste nel vuoto a distanza L. Calcolare l'intensità del campo elettrico generato a distanza R da ciascuna carica.
Si calcoli in oltre il caso limite $R \gg L$.



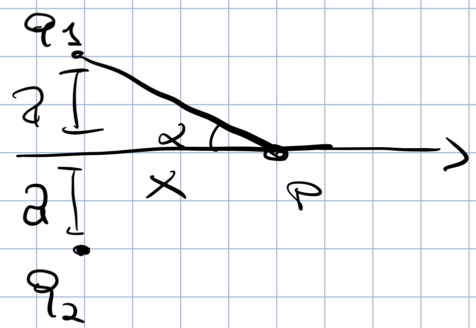
Esercizio 3

Due fili, paralleli ed infiniti, sono carichicon densità uniforme λ, uguali in modulo ma di segno opposto con $|\lambda| = 10^{-8}$ C/m. La distanza tra i due fili è $d = 5$ cm. Calcolare il campo elettrostatico E nel punto P distante $R_1 = 3$ cm dal filo positivo e $R_2 = 4$ cm da quello negativo. Calcolare inoltre la forza per unità di lunghezza con cui i fili si attraggono.

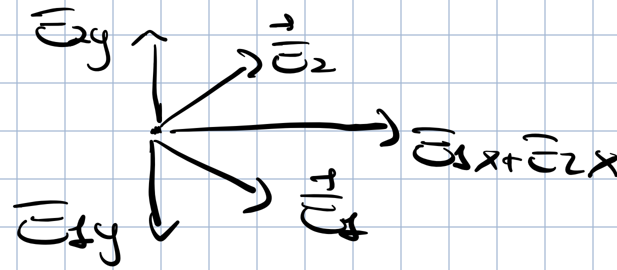
[$E = 7.5 \cdot 10^3$ V/m, $F_l = 3.6 \cdot 10^{-5}$ N/m]



SOLUZIONE ESERCIZIO 1



IN P E $\vec{E}$ DATO DALLA SOMMA VETTORIALE



$$\begin{cases} E_x = E_{1x} + E_{2x} \\ E_y = E_{1y} + E_{2y} \end{cases}$$

DOVE $\begin{cases} E_{xi} = |\vec{E}| \cos\alpha \\ E_{yi} = |\vec{E}| \operatorname{sen}\alpha \end{cases}$ $\quad i = 1,2$

POICHÉ LE DUE CARICHE SONO UGUALI $E_y = 0$

$\Rightarrow$ IL CAMPO SARÀ TUTTO LUNGO x

$$|\vec{E}| = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \frac{1}{a^2+x^2}$$

$$\Rightarrow \quad E_x = 2|\vec{E}|\cos\alpha = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{a^2+x^2}\cos\alpha$$

$$\cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{a^2+x^2}} \quad \Rightarrow \quad E_x = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0}\frac{x}{(a^2+x^2)^{3/2}}$$

PER TROVARE IL PUNTO DOVE IL CAMPO È MASSIMO

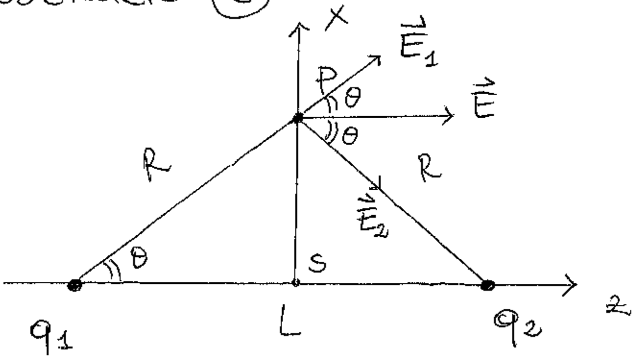
DEVO IMPORRE $\frac{dE_x}{dx} = 0$

$$\Rightarrow \frac{d}{dx}\left[\frac{q}{2\pi\varepsilon_0} \frac{x}{(a^2+x^2)^{3/2}} \right] = 0$$

$$\frac{a^2 - 2x^2}{(a^2+x^2)^{5/2}} = 0 \quad \Rightarrow \quad a^2 = 2x^2$$

$$\Rightarrow \quad x = \pm \frac{a}{\sqrt{2}} \simeq 0{,}35\ m$$

SOLUZIONE ESERCIZIO (2)



Siano $\vec{E}_1$ ed $\vec{E}_2$ i campi elettrici prodotti rispettivamente da q_1 e q_2, nel punto P.

$\vec{E}_1$ ed $\vec{E}_2$ saranno diretti come in figura ed avranno modulo pari a:

$$\begin{cases} E_1 = \left| \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \dfrac{q_1}{R^2} \right| \\ E_2 = \left| \dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \dfrac{q_2}{R^2} \right| \end{cases} \xRightarrow[|q_1| = |q_2| = q]{} \quad E_1 = E_2$$

Il campo elettrico risultante sarà $\vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2$.
Tale campo non ha componente lungo $\hat{x}$, essendo

$$E_{1x} = -E_{2x} \implies E_x = 0$$

ma è diverso da zero lungo la componente perpendicolare a $\hat{x}$, che chiameremo $\hat{z}$

$$E_z = E_{1z} + E_{2z} = E_1\cos\theta + E_2\cos\theta \underset{E_1 = E_2}{=} 2E_1\cos\theta = 2\cdot\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{R^2}\cos\theta$$

che riscritto in termini di $x = \overline{PS}$ ed L:

$$\begin{cases} \dfrac{L}{2} = R\cos\theta \\ x = R\sin\theta \end{cases} \implies R^2 = \frac{L^2}{4} + x^2 ; \quad \cos\theta = \frac{L}{2R} = \frac{L}{2\sqrt{\frac{L^2}{4} + x^2}}$$

$$\implies E_z = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qL}{\left(\frac{L^2}{4} + x^2\right)^{3/2}} \quad ; \quad q\vec{L} = \vec{p} \text{ è chiamato MOMENTO DI DIPOLO}$$

Per calcolare il campo elettrico generato da un dipolo a grande distanza $(x \gg L)$

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{qL}{\left(\frac{L^2}{4} + x^2\right)^{3/2}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{qL}{x^3} \underbrace{\left(\frac{L^2}{4x^2} + 1\right)^{-3/2}}_{(1+\delta)^\alpha}$$

Sviluppando in serie di Taylor:

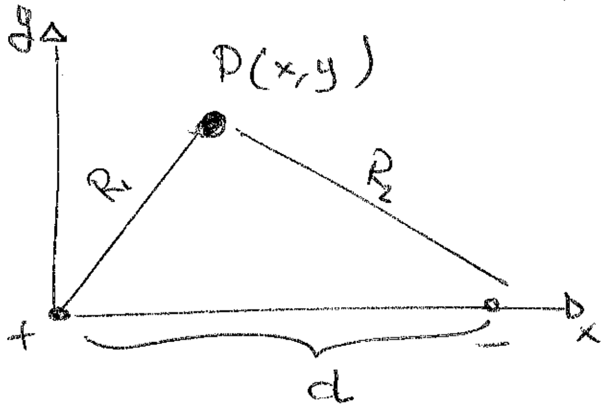
$$(1+\delta)^\alpha \simeq 1 + \alpha\delta + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}\delta^2 + O(\delta^3)$$

$$\Rightarrow E \cong \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{qL}{x^3} \left(1 - \frac{3}{2}\frac{L^2}{4x^2} + \dots\right)$$

Se ci fermiamo al leading order otteniamo:

$$E \cong \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{qL}{x^3} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{p}{x^3}$$

SOLUZIONE ESERCIZIO 3



$R_1 = 3\,cm \qquad R_2 = 4\,cm$

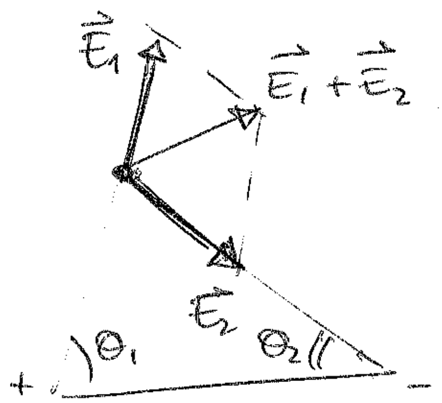
$\lambda = 10^{-8}\ C/m$

$d = 5\,cm$

NEL PUNTO P AGISCONO I SEGUENTI CAMPI

$$|\vec{E}_1| = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} R_1^{-1}$$

$$|\vec{E}_2| = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} R_2^{-1}$$



LE COORDINATE x, y DI P SI TROVANO COME INTERSEZIONE DI DUE CIRCONFERENZE

$$\begin{cases} R_1^2 = x^2 + y^2 \\ R_2^2 = (x-d)^2 + y^2 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{d^2 + R_1^2 - R_2^2}{2d} = 9/5\,cm = 1.8\,cm \\ y = \pm \dfrac{1}{2d}\Big\{ -(d-R_1-R_2)(d+R_1-R_2) \times \end{cases}$$

$$\times (d - R_1 + R_2)(d + R_1 - R_2)\Big\}^{1/2} = \pm \frac{12}{5}\,cm = \pm 2.4\,cm$$

C'È QUINDI SIMMETRIA RISPETTO L'ASSE ORIZZONTALE $(y \to -y)$

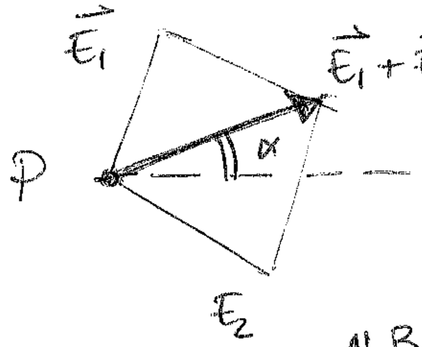
LE COMPONENTI E_x & E_y SI OTTENGONO COME SOVRAPPOSIZIONE DELLE COMPONENTI x, y DEI CAMPI E_1 e E_2

$$\begin{cases} E_x = E_1^x + E_2^x = E_1 \cos\theta_1 + E_2 \cos\theta_2 \\ E_y = E_1^y + E_2^y = E_1 \sin\theta_1 - E_2 \cos\theta_2 \end{cases}$$

DOVE

$$\begin{cases} \sin\theta_1 = \dfrac{y}{R_1} = 0.8 \Longrightarrow \cos\theta_1 = 0.6 \\ \sin\theta_2 = y/R_2 = 0.6 \Longrightarrow \cos\theta_2 = 0.8 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} E_x = 7.2 \times 10^3 \ V/m \\ E_y = 2.1 \times 10^3 \ V/m \end{cases}$$



$\vec{E}_1 + \vec{E}_2 = \vec{E}_{TOT}$

$$|\vec{E}_{TOT}| = \sqrt{E_x^2 + E_y^2} = 7.5 \times 10^3 \frac{V}{m}$$

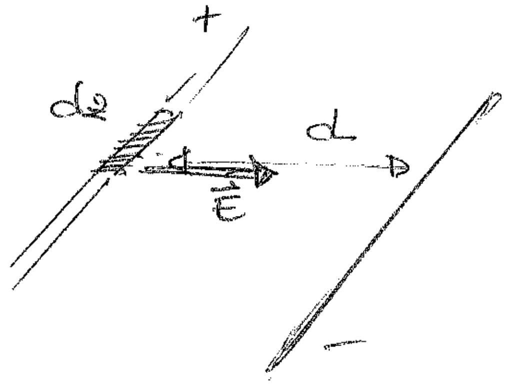
N.B.
L' ANGOLO α È DATO DA

$$tg\,\alpha = E_y/E_x \Rightarrow \alpha \simeq 16.3°$$

LA FORZA CON CUI SI ATTRAGGONO I DUE FILI SI CALCOLA FACILMENTE A PARTIRE DALLA FORZA RISENTITA DA UN ELEMENTO DI FILO $d\ell$ POSTO NEL CAMPO DELL' ALTRO FILO

LA CARICA IN $d\ell$ È $dq = \lambda \, d\ell$

$$d|\vec{F}| = E\,dq = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\frac{1}{d}\lambda\,d\ell = \frac{\lambda^2}{2\pi\varepsilon_0 d}\,d\ell$$



$$F_\ell = \frac{d|\vec{F}|}{d\ell} = \frac{\lambda^2}{2\pi\varepsilon_0 d} = 3.6 \ 10^{-5} \frac{N}{m}$$