Trasporto in Semiconduttori e Metalli - Esercizi con soluzioni

Fisica della Materia Condensata

Dipartimento di Matematica e Fisica
Università degli Studi Roma Tre

A.A. 2016/2017

Trasporto in Semiconduttori e Metalli

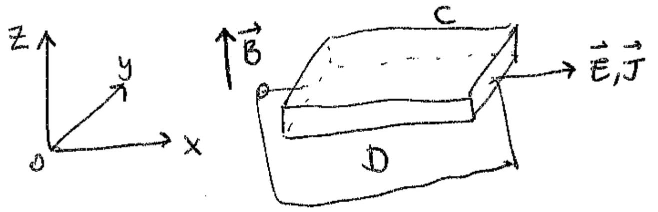
TRASPORTO (Semiconduttori e Metalli)

ES 1

Derivare l'espressione del coefficiente di Hall per un semiconduttore in funzione delle mobilità e delle densità di portatori.

Soluzione

	v	J
lacune:	$\xrightarrow{}$ v_p	$\xrightarrow{}$ $\vec{J}_p = q p \vec{v}_p$
elettroni:	$\xleftarrow{}$ v_e	$\xrightarrow{}$ $\vec{J}_n = -q n \vec{v}_e$



Consideriamo un campione rettangolare nel piano xy sul quale è applicato un campo elettrico E_x e un campo magnetico B_z.
Il campo elettrico causa il drift degli elettroni nella direzione $-x$ e il drift delle lacune lungo x.
A causa di questo moto il campo magnetico esercita sui portatori una forza di Lorentz $q\vec{v} \times \vec{B}$ che causa la deflessione di lacune ed elettroni verso $-y$ lungo $-y$, verso la superficie D. La cancellazione di elettroni e buche non è completa e risulta in una carica netta accumulata in D (e una opposta in C). Ciò produce un campo elettrico, il campo di Hall E_y, nella direzione y.

La conducibilità elettrica di un semiconduttore è:

$$\sigma = nq\mu_n + pq\mu_p$$

con: n : concentrazione elettroni $\quad$ μ_n : mobilità elettroni
p : " buche $\quad$ μ_p : " buche

(buche = lacune)

Nello stato stazionario non c'è corrente netta lungo y

$$J_y = (J_p)_y + (J_n)_y = 0 \qquad J:\ \text{densità corrente}$$

le densità di corrente dei due portatori:

$$(J_p)_y = p q \mu_p E_y^{TOT} = p q \mu_p \left(\epsilon_y - (v_p)_x B_z\right) = \qquad (v_{px}) = \mu_p E_x$$

$$= p q \mu_p \left(\epsilon_y - \mu_p E_x B_z\right)$$

$$(J_n)_y = n q \mu_n E_y^{TOT} = n q \mu_n \left(\epsilon_y - (v_n)_x B_z\right) =$$

$$= n q \mu_n \left(\epsilon_y + \mu_n E_x B_z\right)$$

$$J_p = (p q \mu_p + n q \mu_n)\, \epsilon_y + (n q \mu_n^2 - p q \mu_p^2) E_x B_z = 0$$

$$\epsilon_y = \frac{-n q \mu_n^2 + p q \mu_p^2}{p q \mu_p + n q \mu_p} E_x B_z = \frac{-n \mu_n^2 + p \mu_p^2}{p \mu_p + n \mu_n} E_x B_z$$

$$R_H = \frac{\epsilon_y}{J_x B_z} = \frac{E_y}{\sigma E_x B_z} = \frac{1}{q} \frac{p \mu_p^2 - n \mu_n^2}{(p \mu_p + n \mu_n)^2}$$

~~es~~ intrinseco: $n = p$

$$R_H = \frac{1}{qn} \frac{\mu_p^2 - \mu_n^2}{(\mu_p + \mu_n)^2} = \frac{1}{qn} \frac{\mu_p - \mu_n}{\mu_p + \mu_n}$$

drogaggio forte: $n \gg p \qquad R_H = \frac{1}{q} \frac{-n \mu_n^2}{n^2 \mu_n^2} = -\frac{1}{qn}$

$$p \gg n \qquad R_H = \frac{1}{qn}$$

ESERCIZIO 2

In un semiconduttore intrinseco la concentrazione degli elettroni $n(T)$ a 500 K e 600 K sia $n(500K) = 2.5 \cdot 10^{20}\ m^{-3}$ e $n(600K) = 2 \cdot 10^{21}\ m^{-3}$, mentre la conducibilità a 500 K sia $\sigma(500K) = 4 \cdot 10^{-4}\ \Omega^{-1} m^{-1}$.

Sapendo che in tale semiconduttore il potenziale chimico si trova sempre a metà della gap di energia e ipotizzando che le mobilità degli elettroni e delle lacune siano indipendenti dalla temperatura tra 500 K e 600 K, con quella degli elettroni pari a 4 volte ~~di~~ quella delle lacune, determinare:

a) l'energia della gap

b) la massa efficace dei portatori

c) i tempi di rilassamento per elettroni e lacune

d) quale delle ipotesi del problema è incompatibile con l'essere il semiconduttore intrinseco?

Si ricorda che:

$$\sigma = n e \mu_n + p e \mu_p$$

$$\mu(T) = \epsilon_V + \frac{E_G(T)}{2} - \frac{3}{4} k_B T \ln\left(\frac{m_e^*}{m_p^*}\right)$$

$$n_i(T) = \frac{1}{4}\left(\frac{2 k_B T}{\pi \hbar^2}\right)^{3/2} (m_e^* m_p^*)^{3/4} \exp\left[-\frac{E_G}{2 k_B T}\right]$$

Soluzione

In un semiconduttore intrinseco le concentrazioni di elettroni e lacune sono uguali.
Nel presente caso, inoltre, sono uguali anche le masse efficaci dei due portatori in quanto il potenziale chimico μ si trova sempre a metà gap:

$$\mu = \epsilon_V + \frac{E_G}{2} \quad \rightarrow \ln\left(\frac{m_e^*}{m_p^*}\right) = 0 \quad \rightarrow m_e^* = m_p^*$$

→

a) quindi:

$$\begin{cases} n = p = n_i \\ m^*_e = m^*_p = m^* \end{cases}$$

$$\sigma(T) = n_i e (\mu_e + \mu_p) \qquad \text{con} \quad n_i = \frac{1}{4}\left(\frac{2k_BT}{\pi\hbar^2}\right)^{3/2} (m^*)^{3/2} e^{-\frac{E_g}{2k_BT}}$$

Sappiamo poi che $\mu_e = 4\mu_p$ con $\mu_e = \frac{e\tau_e}{m^*}$ e $\mu_p = \frac{e\tau_p}{m^*}$ tra 500K e 600K, per cui in questo intervallo vale $\tau_e = 4\tau_p$

Quindi la concentrazione n_i dipende solo da m^* e E_g:

$$n_i(500) = \frac{1}{4}\left(\frac{2k_B\,500K}{\pi\hbar^2}\right)^{3/2} (m^*)^{3/2} \exp\left[-\frac{E_g}{2k_B \cdot 500K}\right] = 2.5 \cdot 10^{20}\ m^{-3}$$

$$n_i(600) = \frac{1}{4}\left(\frac{2k_B\,600K}{\pi\hbar^2}\right)^{3/2} (m^*)^{3/2} \exp\left[-\frac{E_g}{2k_B\,600K}\right] = 2 \cdot 10^{21}\ m^{-3}$$

dal rapporto ottengo E_g:

$$\frac{n_i(600)}{n_i(500)} = \left(\frac{6}{5}\right)^{3/2} \exp\left[-\frac{E_g}{2k_B}\left(\frac{1}{600K} - \frac{1}{500K}\right)\right] = 8$$

$$\frac{E_g}{2k_B\,3000K} = \ln\left[8\left(\frac{5}{6}\right)^{3/2}\right]$$

$$E_g = 10835.8\ k_B\,K = 0.934\ eV$$

b) m^* la posso prendere da una delle due n_i note. A 500K:

$$\cancel{2.5 \cdot 10^{20} m^{-3} = \frac{1}{4}\left(\frac{2k_B\,500K}{\pi\hbar^2}\right)^{3/2} (m^*)^{3/2} \exp\left[-\frac{E_g}{2k_B\,500K}\right]}$$

$$m^* = \left[n_i(T) \cdot 4 \cdot \left(\frac{2k_BT}{\pi\hbar^2}\right)^{-3/2} e^{\frac{E_g}{2k_BT}}\right]^{2/3} =$$

$$= (4n_i(T))^{2/3} \left(\frac{\pi\hbar^2}{2k_BT}\right) e^{\frac{E_g}{3k_BT}} =$$

$$= (4 \cdot 2.5 \cdot 10^{20}\ m^{-3})^{2/3} \cdot \left(\frac{\pi \cdot (1.05 \cdot 10^{-34})^2\ J^2 \cdot s^2}{2 \cdot 1.38 \cdot 10^{-23}\ JK^{-1} \cdot 500K}\right) \exp\left[\frac{10835.8\,K}{3 \cdot 500\,K}\right] =$$

$$= 3.43 \cdot 10^{-31}\ kg$$

c) $\sigma(T) = n_i(T)\, e\, (\mu_n + \mu_p) = n_i\, e \cdot 5 \mu_p = n_i \cdot e \cdot 5 \cdot \frac{e\, \tau_p}{m^*} =$

$= n_i(T)\, e^2\, \frac{5\, \tau_p}{m^*}$

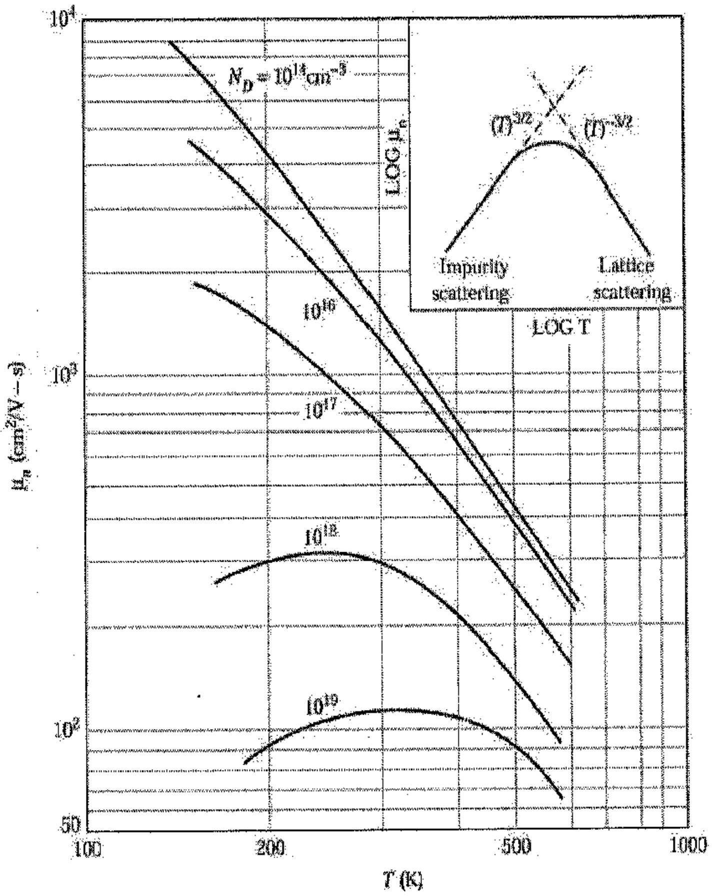
a 500 K:

$$\tau_p = \frac{m^*\, \sigma(T)}{n_i(T)\, 5 \cdot e^2} = \frac{3.43 \cdot 10^{-31}\,\text{kg} \cdot 4 \cdot 10^{-4}\, \Omega^{-1}\text{m}^{-1}}{2.5 \cdot 10^{20}\, \text{m}^{-3} \cdot 5 \cdot (1.602)^2 \cdot 10^{-38}\, \text{C}^2} =$$

$$= 4.27 \cdot 10^{-18}\ \text{s}$$

$$\tau_n = 4\, \tau_p = 1.71 \cdot 10^{-17}\ \text{s}$$

d) Essendo il semiconduttore intrinseco, le mobilità di elettroni e lacune dipendono da T solo per l'interazione con i fononi, che cresce al crescere di T. Pertanto le mobilità non possono essere costanti in T.



ESERCIZIO 3

Si abbia un semiconduttore intrinseco di cui siano note a temperatura ambiente la conducibilità $\sigma(300K) = 4.5 \cdot 10^{-4} \Omega^{-1} m^{-1}$, il coefficiente di Hall $R_H(300K) = -2.35 \cdot 10^{2}\, m^3 C^{-1}$ e la mobilità degli elettroni $\mu_e(300K) = 0.15\, m^2 V^{-1} s^{-1}$; inoltre si conoscono a 600 K la mobilità degli elettroni $\mu_e(600K) = 0.042\, m^2 V^{-1} s^{-1}$, quella delle lacune $\mu_p(600K) = 0.01\, m^2 V^{-1} s^{-1}$ e la conducibilità $\sigma(600K) = 83\, \Omega^{-1} m^{-1}$.

Si chiede di determinare:

1) la concentrazione dei portatori intrinseci a temperatura ambiente
2) il valore della gap ottica del materiale, supposta indipendente dalla temperatura fra 300 K e 600K, con la maggiore precisione possibile

Supponiamo ora di drogare il materiale con soli donori di energia di legame $\epsilon_D = 0.015$ eV in concentrazione $N_D = 7 \cdot 10^{18} cm^{-3}$.

3) Determinare se il semiconduttore è degenere o meno a T=0K, ossia tale che sia avvenuta la transizione di Mott.

Sono note la costante dielettrica relativa del materiale $\epsilon_r = 12$ e le formule per energia di legame e raggio di Bohr della impurezza riportate di seguito (si suppone valido il modello idrogenoide).

$$\sigma = q(n\mu_n + p\mu_p) \quad ; \quad R_H = \frac{1}{q} \frac{p\mu_p^2 - n\mu_n^2}{(p\mu_p + n\mu_n)^2} \quad \text{nel sistema SI}$$

$$E_n = \frac{m_e^*}{m_0} \frac{1}{\epsilon_r^2} \frac{1}{n^2} R_y \quad ; \quad a_n = \frac{m_0}{m_e^*} \epsilon_r n^2 a_B$$

$$R_y = 13.6 \text{ eV} \quad ; \quad a_B = 0.05 \text{ nm}$$

Soluzione

1) Nel caso intrinseco $(n=p=n_i)$ valgono:

$$\sigma = q n_i (\mu_n + \mu_p)$$

$$R_H = \frac{1}{q n_i} \frac{(\mu_p - \mu_n)}{(\mu_p + \mu_n)^2}$$

da cui si ricava:

$$\sigma(300k)\, R_H(300k) = \mu_p(300k) - \mu_n(300k)$$

$$\rightarrow \mu_p(300k) = (\sigma R_H + \mu_n)\big|_{300k} = (-0.1058 + 0.15)\, V^{-1}s^{-1}m^2 = 0.0443\ V^{-1}s^{-1}m^2$$

$$n_i(300) = \frac{\sigma(300)}{q\,(\mu_n(300) + \mu_p(300))} = \frac{4.5 \cdot 10^{-4}\ \Omega^{-1}m^{-1}}{1.6 \cdot 10^{-19}\, C \cdot 0.1943\ V^{-1}s^{-1}m^2} = 1.45 \cdot 10^{15}\ m^{-3}$$

2) $$n_i(600) = \left(\frac{\sigma}{q(\mu_n + \mu_p)}\right)_{600k} = \frac{83\ \Omega^{-1}m^{-1}}{1.6 \cdot 10^{-19}\, C \cdot 0.052\ V^{-1}s^{-1}m^2} = 9.98 \cdot 10^{21}\ m^{-3}$$

l'andamento in T di n_i è:

$$n_i(T) = \sqrt{N_c(T)\, N_v(T)}\ e^{-\frac{E_g}{2k_BT}} \qquad E_g:\ \text{en. gap}$$

e
$$\begin{cases} N_c(T) = \frac{1}{4}\left(\frac{2 m_c^* k_B T}{\pi \hbar^2}\right)^{3/2} \\ N_v(T) = \frac{1}{4}\left(\frac{2 m_v^* k_B T}{\pi \hbar^2}\right)^{3/2} \end{cases}$$

cioè: $$n_i(T) = C\, T^{3/2}\, e^{-\frac{E_g}{2k_BT}} \qquad C:\ \text{cost}$$

$$\frac{n_i(600k)}{n_i(300k)} = \left(\frac{600k}{300k}\right)^{3/2} \exp\left[-\frac{E_g}{2k_B}\left(\frac{1}{600k} - \frac{1}{300k}\right)\right]$$

$$0.69 \cdot 10^{6} = 2^{3/2}\ \exp\left[\frac{E_g}{2k_B\, 600k}\right]$$

$$E_g = 1200\ K \cdot 8.61 \cdot 10^{-5}\ eV\, K^{-1}\, \ln\left[\frac{0.69 \cdot 10^{6}}{2^{3/2}}\right] = 1.28\ eV$$

3) Il semiconduttore è degenere se la densità dei donori è superiore a quella caratteristica per la transizione metallo-isolante. Quest'ultima è la concentrazione per le quale il raggio dell'orbita dello stato (elettronico) dell'impurezza porti a una sovrapposizione fra funzioni d'onda di impurezze prime vicine:

$$N_D > N_{TIM} = \frac{1}{\frac{4}{3}\pi a_B^3}$$

Determiniamo il raggio dell'orbita dello stato dell' impurezza:

$$E_n a_n = \frac{1}{\epsilon_r} R_y a_B$$ (NOTATE che NON DIPENDE DA n il prodotto $E_n a_n$)

Le nostre impurezze hanno: $E_n = \epsilon_D = 0.015\,eV$

$$a_n = \frac{1}{\epsilon_r \epsilon_D} R_y a_B = \frac{13.6\,eV \cdot 0.05\,nm}{12 \cdot 0.015\,eV} = 3.77\,nm$$

da cui:

$$N_{TIM} = \left(\frac{4}{3}\pi a_n^3\right)^{-1} = \left(\frac{4 \cdot \pi \cdot (3.77)^3 \cdot 10^{-27} m^3}{3}\right)^{-1} = 4.46 \cdot 10^{24}\, m^{-3}$$

vediamo che $N_D = 7 \cdot 10^{18}\, cm^{-3} = 7 \cdot 10^{24}\, m^{-3} > N_{TIM}$

per cui il semiconduttore e' degenere.

$N_D < N_{TIM}$ $N_D = N_{TIM}$ $N_D > N_{TIM}$

↓

gli e⁻ sono fortemente localizzati

di fatto, per vedere se c'e' la formazione di una banda di impurezze, il raggio dell' orbita dell' impurezza va confrontato con la distanza media tra impurezze.

ESERCIZIO 4

1) Nell' InAs intrinseco la concentrazione dei portatori liberi a due temperature è data da:

$n_i(200K) = 7.6 \cdot 10^{12}\ cm^{-3}$; $n_i(300K) = 8.7 \cdot 10^{14}\ cm^{-3}$

mentre la gap interbanda varia con la temperatura secondo la legge:

$$\tilde{E}_g(T) = E_0 - \frac{AT^2}{T + 83K} \qquad (\text{in } K)$$

Si determini il valore della gap a 400 K sapendo che nella formula che fornisce la dipendenza esponenziale di $n_i(T)$ si ha:

$$N_C(T) = 1.68 \cdot 10^{13}\ T^{3/2}\ K^{2/3}\ cm^{-3}$$
$$N_V(T) = 1{,}27 \cdot 10^{15}\ T^{3/2}\ K^{2/3}\ cm^{-3}$$

2) La mobilità totale μ_T delle lacune è legata al contributo μ_{imp} della diffusione dalle impurezze e a quello μ_{ret} della diffusione dai fononi tramite la legge (composizione di probabilità di eventi indipendenti):

$$\frac{1}{\mu_T} = \frac{1}{\mu_{imp}} + \frac{1}{\mu_{ret}}$$

Queste a loro volta variano con la temperatura come:

$$\mu_{imp} = A\,T^{3/2}\ m^2V^{-1}s^{-1} \quad ; \quad \mu_{ret} = B\,T^{-3/2}\ m^2V^{-1}s^{-1}$$

con $A = 1 \cdot 10^{-4}$ e $B = 1 \cdot 10^2$ e le temperature nelle formule vanno messe in K.

Determinare:

a) la temperatura T_M alla quale la mobilità totale μ_T assume il suo valore massimo

b) il valore di $\mu_T(T = T_M)$.

3) In un semiconduttore drogato, la temperatura T_M varia con il drogaggio. A tre diverse concentrazioni di accettori si trova:

$T_{M1} = 70\,K$ per $N_{A1} = 5,7 \cdot 10^{22}\ m^{-3}$

$T_{M2} = 100\,K$ per $N_{A2} = 1.6 \cdot 10^{23}\ m^{-3}$

$T_{M3} = 200\,K$ per $N_{A3} = 1.63 \cdot 10^{24}\ m^{-3}$

Basandosi su questi dati, determinare la dipendenza di μ_{imp} dalla concentrazione di impurezze N_A (dare una stima).

Soluzione

① $$n_i(T) = \sqrt{N_C(T) N_V(T)}\ \exp\left[-\frac{E_g(T)}{2k_BT}\right] =$$

$$= 1{,}46 \cdot 10^{14}\ T^{3/2}\ \exp\left[-\frac{E_g(T)}{2k_BT}\right] \quad K^{2/3}\,cm^{-3}$$

da $n_i(200k)$ e $n_i(300k)$ prendiamo il valore delle gap alle due temperature corrispondenti:

@ 200 K: $$7.6 \cdot 10^{12}\,cm^{-3} = 1.46 \cdot 10^{14} \cdot (200)^{3/2} \exp\left[-\frac{E_g(200k)}{k_B}\frac{1}{400\,K}\right] cm^{-3}$$

$$\frac{E_g(200k)}{k_B} = 400\,K\ \ln\left[\frac{1.46 \cdot 10^{14}\,(200)^{3/2}}{7.6 \cdot 10^{12}}\right] = 4361.2\,K = \tilde{E}_g(200k)$$

@ 300 K: $$8.7 \cdot 10^{14}\,cm^{-3} = 1.46 \cdot 10^{14} \cdot (300)^{3/2} \exp\left[\frac{E_g(300k)}{k_B}\frac{1}{600\,k}\right] cm^{-3}$$

$$\frac{E_g(300k)}{k_B} = 600\,K\ \ln\left[\frac{1.46 \cdot 10^{14}\,(300)^{3/2}}{8,7 \cdot 10^{14}}\right] = 4062.5\,K = \tilde{E}_g(300K)$$

con questi due valori possiamo trovare le costanti E_0 ed A della legge:

$$\begin{cases} 4361.2\,K = E_0 - \dfrac{A\,(200)^2}{283}\,K \\ 4062.5\,K = E_0 - \dfrac{A\,(300)^2}{383}\,K \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 3.19 \\ E_0 = 4812{,}1\,K \end{cases}$$

$$\rightarrow \tilde{E}_g(400k) = 4812{,}1\,K - \frac{3.19 \cdot (400)^2}{483}\,K = 3755.4\,K$$

$$E_g(400k) = \tilde{E}_g(400\,k) \cdot K_B = 0{,}324\ eV$$

(2) $$\frac{1}{\mu_T} = \frac{T^{-3/2}}{A} + \frac{T^{3/2}}{B}$$

i massimi di una funzione corrispondono ai minimi della sua inversa

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial T}\left(\frac{1}{\mu_T}\right)\Big|_{MIN} = -\frac{3}{2}\frac{T_M^{-5/2}}{A} + \frac{3}{2}\frac{T_M^{1/2}}{B} = 0 \\ \frac{\partial^2}{\partial T^2}\left(\frac{1}{\mu_T}\right) = \frac{15}{4}\frac{T^{-7/2}}{A} + \frac{3}{4}\frac{T^{-1/2}}{B} \end{cases}$$

(> 0 sempre !)

a)

$$-\frac{T_M^{-5/2}}{A} + \frac{T_M^{1/2}}{B} = 0 \rightarrow T_M = \left(\frac{B}{A}\right)^{1/3} = (10^6)^{1/3} = 100\ K$$

b) $$\frac{1}{\mu_T(T_M)} = \frac{T_M^{-3/2}}{A} + \frac{T_M^{3/2}}{B} = 20\ m^{-2}Vs$$

$$\rightarrow \mu_T(T_M) = 0{,}05\ m^2V^{-1}s^{-1}$$

(3) $$T_M = \left(\frac{B}{A}\right)^{1/3}$$

la diffusione da reticolo (B) non dipende dalle impurezze, (B = cost); ~~diciamo~~ scriviamo una dipendenza generica dal drogaggio N_A per il coeff. A:

$$A = C\,N_A^{\alpha} \qquad C, \alpha \text{ sono costanti}$$

$$T_M = \left(\frac{B}{C}\right)^{1/3} N_A^{-\alpha/3}$$

per 2 temperature : $$\frac{T_1}{T_2} = \left(\frac{N_{A1}}{N_{A2}}\right)^{-\alpha/3} \rightarrow \alpha = -3\frac{\ln\frac{T_1}{T_2}}{\ln\frac{N_{A1}}{N_{A2}}}$$

con T_{M1} e T_{M2} : $\alpha^{(1)} = -1{,}036$

con T_{M1}, T_{M3} : $\alpha^{(2)} = -0{,}939$

con T_{M2}, T_{M3} : $\alpha^{(3)} = -0{,}896$

$\rightarrow \bar{\alpha} = -0{,}957$

ovvero, $\alpha \sim -1$, $A = C\frac{1}{N_A}$, μ_{imp} va come l'inverso del drogaggio (circa).

ESERCIZIO 5

In un campione di Ge si trova $\mu_n = 3600\ cm^2 V^{-1} s^{-1}$ e $\mu_p = 1600\ cm^2 V^{-1} s^{-1}$. Il campione non mostra effetto Hall. Quale frazione j_p / j_{TOT} della densità di corrente totale è trasportata dalle buche?

Soluzione

Se non si osserva effetto Hall : $R_H = 0$

$$R_H = -\frac{1}{qc} \frac{n\mu_n^2 - p\mu_p^2}{(n\mu_n + p\mu_p)^2} = 0 \qquad \rightarrow n\mu_n^2 = p\mu_p^2$$

$$\frac{p}{n} = \left(\frac{\mu_n}{\mu_p}\right)^2 = \left(\frac{3.6}{1.6}\right)^2 = 5{,}06$$

$$j_{TOT} = j_n + j_p \qquad j_n = n\mu_n E_x \quad e \quad j_p = p\mu_p E_x$$

da cui:

$$\frac{j_p}{j_{TOT}} = \frac{p\mu_p E_x}{(p\mu_p + n\mu_n) E_x} = \frac{p\mu_p}{p\mu_p + n\mu_n} = \frac{p/n}{p/n + \mu_n/\mu_p} =$$

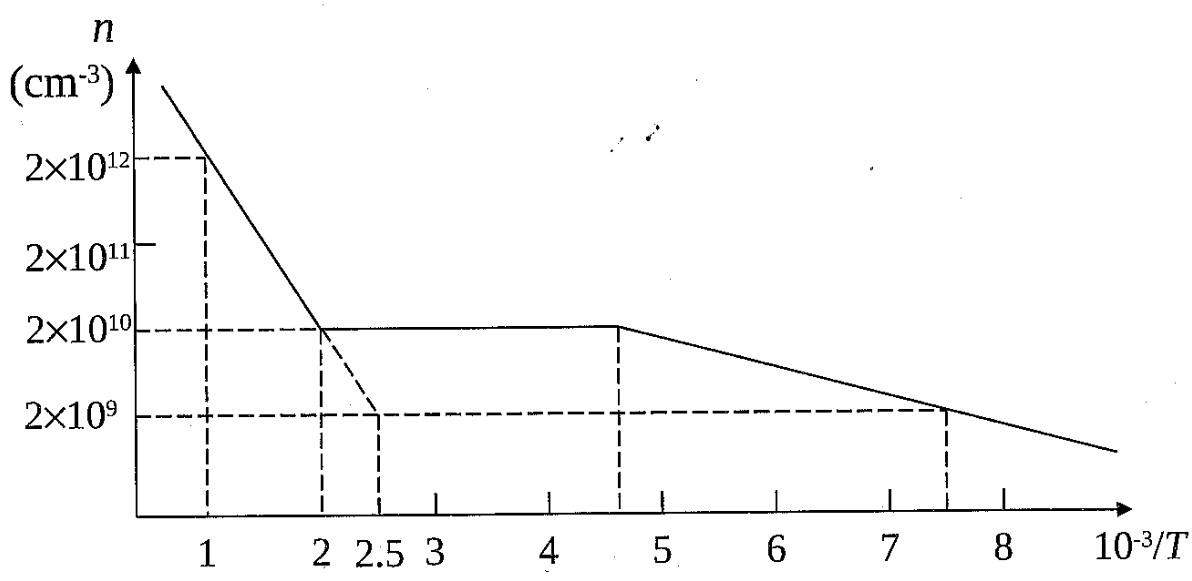
$$= \frac{5{,}06}{5{,}06 + \frac{3.6}{1.6}} = 0{,}69 = 69\%$$

ESERCIZIO 6

In un semiconduttore privo di accettori la banda di conduzione è descritta dalla relazione:

$$E(\vec{k}) = E_g + A\left[\sin^2(ak_x) + \sin^2(ak_y) + \sin^2(ak_z)\right]$$

con $a = 0.3$ nm e $A = 5$ eV.
La densità n di elettroni è riportata in figura in scala semilogaritmica vs $1/T$ e il tempo medio fra due urti è $\tau = 10^{-13}$ s.



a) Commentare il grafico

b) Trovare l'energia della gap, E_g

c) Dimostrare che a $T = 400$ K $n \gg p$

d) Trovare la conducibilità σ e il cammino libero medio degli elettroni a $T = 400$ K.

Soluzione →

a) la doppia pendenza indica che il semiconduttore è drogato. Il drogaggio è di tipo n. Si ha:

1) un regime a bassa temperatura fino a $\frac{1000}{T_1} \simeq 4.5$, $T_1 \sim 220\,K$. Al di sotto di $T = 220\,K$ ~~[illegible]~~ si ha:

$$n(T) \propto \exp\left(-\frac{E_d}{2k_BT}\right)$$

E_d: energia di legame del livello donore (en. ionizzazione)

2) un regime intermedio tra T_1 e $\frac{1000}{T_2} \simeq 2$, $T_2 = 500\,K$ dove tutti i donori sono ionizzati. Qui si ha:

$n(T) = N_d = 2 \cdot 10^{10}\ cm^{-3}$ (valore del plateau)

N_d: conc. di donori

$p \ll n$

3) Un regime di alte temperature $(T > T_2)$ in cui il comportamento del semiconduttore è di tipo intrinseco, quindi si ha:

$$n(T) \propto \exp\left[-\frac{E_g}{2k_BT}\right]$$

E_g : energia della gap

$$n(T) = p(T) = n_i(T)$$

b) E_g si determina nel regime delle alte temperature

$$n(T) \propto \exp\left[-E_g/2k_BT\right]$$

$$\ln n(T) = cost - \frac{E_g}{2k_BT}$$

Per eliminare la costante valutiamo l'espressione in due punti (A e B) e facciamo la sottrazione:

$$\ln n_A - \ln n_B = -\frac{E_g}{2k_B}\left(\frac{1}{T_A} - \frac{1}{T_B}\right)$$

$$\ln\left(2\cdot10^{12}/2\cdot10^{10}\right) = -\frac{E_g}{2k_B}\cdot 10^{-3}\left(1-2\right)K^{-1}$$

$$E_g = 2\cdot10^{+3}\cdot\ln(10^2)K k_B = 9210\ k_B\,K = 0{,}792\ eV$$

c) A 400 K $\left(\frac{1000}{T} = 2.5\right)$ siamo in regione intermedia per cui $n(T) = 2\cdot10^{10}\ cm^{-3}$. Il corrispondente valore a 400 K della densità di portatori intrinseci $n_i(T)$ la possiamo trovare dall'estrapolazione del grafico dalle alte T a 400K (punto c):

$n_i(400K) = 2 \cdot 10^9 \ cm^{-3}$

la densità dei minoritari (lacune) è dunque, a 400K:

$$p = \frac{n_i^2}{n} = \frac{4 \cdot 10^{18}}{2 \cdot 10^{10}} \ cm^{-3} = 2 \cdot 10^8 \ cm^{-3}$$

per cui $p \ll n$.

d) A 400 K $p \ll n$, per cui alla conducibilità contribuiscono solo gli elettroni:

$$\sigma \simeq \frac{n e^2 \tau_e}{m_e^*} \qquad n = 2 \cdot 10^{10} \ cm^{-3}$$

L'unica incognita è la massa efficace degli elettroni in banda di ~~valenza~~ conduzione, ~~[illegible]~~ al minimo della banda, ~~[illegible]~~ che ci aspettiamo stare data la bassa densità:

$$E(k) = E_g + A[\sin^2(ak_x) + \sin^2(ak_y) + \sin^2(ak_z)] \simeq$$
$$\simeq E_g + Aa^2(k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) = E_g + Aa^2k^2$$

$$\frac{\partial^2 E}{\partial k^2} = 2Aa^2$$

$$m_e^* = \hbar^2 \left[\frac{\partial^2 E}{\partial k^2}\right]^{-1} = \frac{\hbar^2}{2Aa^2} = \frac{6.583 \cdot 10^{-16} \, eV \cdot s \cdot 1.055 \cdot 10^{-34} \, J \cdot s}{2 \cdot 5 \, eV \cdot (0.3)^2 \cdot 10^{-18} \, m^2} =$$

$$= 7.72 \cdot 10^{-32} \, kg = 0{,}085 \, m_e \qquad (m_e = 9.11 \cdot 10^{-31} \, kg)$$

$$\sigma(400K) = \frac{n e^2 \tau_e}{m_e^*} = \frac{2 \cdot 10^{16} \, m^{-3} \cdot (1.6 \cdot 10^{-19})^2 C^2 \cdot 10^{-13} s}{7.72 \cdot 10^{-32} \, kg} = 0{,}66 \cdot 10^{-3} \, \Omega^{-1} m^{-1}$$

Il cammino libero medio è dato dalla velocità termica per il tempo medio fra due urti:

$$v_e \simeq v_T = \sqrt{\frac{3k_BT}{m_e^*}} \qquad \left(\text{da equipartizione energia } \tfrac{1}{2} m_e^* v_T^2 = \tfrac{3}{2} k_BT\right)$$

$$\lambda = v_e \tau_e = 10^{-13} s \left(\frac{3 \cdot 1.38 \cdot 10^{-23} \, J \cdot K^{-1} \cdot 400K}{7.72 \cdot 10^{-32} \, kg}\right)^{1/2} = 4.63 \cdot 10^{-8} \, m =$$

$$= 46.3 \, nm$$

ESERCIZIO 7

In un semiconduttore unidimensionale con passo $a = 0.1\,nm$ l'energia della banda di conduzione è, in eV:

$$\mathcal{E}(K) = A - \cos(Ka) - 0.7\cos(2Ka) - 0.5\cos(3Ka)$$

e ha minimi a $k_0 = 0$, a $\pm k_1 = \pm 22.19\,nm^{-1}$ e a $\pm k_2 = \pm 40.62\,nm^{-1}$.

a) Determinare la massa efficace m^* e la mobilità μ in k_0 e k_1, sapendo che $\tau = 10^{-12}\,s$, la densità degli elettroni in banda di conduzione è $n = 10^5\,cm^{-1}$ e la temperatura è tale che tutti gli elettroni sono nel minimo a k_0.

b) Applicando un campo elettrico E alcuni elettroni riescono a portarsi nei minimi a $\pm k_1$, secondo la relazione:

$$\frac{n(k_1, E)}{n(k_0, E)} = \left(\frac{E}{E_0}\right)^2$$

dove E_0 è un parametro. Trovare la conducibilità del semiconduttore per un campo applicato $E = 2E_0$.

Soluzione

a) $$m^*(k) = \hbar^2\left(\frac{\partial^2 \mathcal{E}(k)}{\partial k^2}\right)^{-1} = \hbar^2 a^{-2}\left(\cos(ka) + 0.7\cdot 2^2\cos(2ka) + 0.5\cdot 3^2\cos(3ka)\right)^{-1}$$

$$m^*\big|_{k=0} = m^*(k_0) = \frac{\hbar^2}{a^2(1 + 0.7\cdot 2^2 + 0.5\cdot 3^2)} = \frac{(6.58)^2\cdot 10^{-32}\,eV^2 s^2}{10^{-20}\,m^2 \quad 8.3\,eV} =$$

$$= 5.22\cdot 10^{-12}\,\frac{eVs^2}{m^2} \underset{1eV = 1.6\cdot 10^{-19}J}{=} 8.35\cdot 10^{-31}\,Kg$$

$$m^*(\pm k_1) = \frac{\hbar^2}{a^2(\cos(k_1 a) + 2.8\cos(2k_1 a) + 4.5\cos(3ka))} =$$

$$= \frac{(6.58)^2\cdot 10^{-32}\,eV^2 s^2\cdot 1.6\cdot 10^{-19}\,J/eV}{10^{-20}\,m^2\,(\cos(2.219) + 2.8\cos(4.438) + 4.5\cos(6.657))\,eV} =$$

$$= 2.45\cdot 10^{-30}\,Kg$$

$$\mu_0 = \mu(k_0) = \frac{e\tau}{m^*(k_0)} = \frac{1.6\cdot 10^{-19}\,C \cdot 10^{-12}\,s}{8.35\cdot 10^{-31}\,kg} = 0.192\ \frac{Cs}{kg} = 0.192\ m^2/Vs$$

$$\mu_1 = \mu(\pm k_1) = \frac{e\tau}{m^*(k_1)} = \frac{1.6\cdot 10^{-19}\,C\cdot 10^{-12}\,s}{2.45\cdot 10^{-30}\,kg} = 0.065\ m^2/Vs$$

b) la conducibilità è la somma di due contributi: quello degli elettroni in k_0 con mobilità μ_0 e quello degli elettroni in $\pm k_1$ con mobilità μ_1:

$$\sigma = n_0 e \mu_0 + n_1 e \mu_1$$

per la conservazione del numero di elettroni, gli elettroni che ora sono in k_1 e k_0 sono quelli che prima di applicare il campo elettrico erano in k_0 con densità $n = 10^5\ cm^{-1}$:

$$n_0 + n_1 = 10^5\ cm^{-1} = 10^7\ m^{-1}$$

inoltre per $E = 2E_0$ si ha: $\frac{n_1}{n_0} = 2^2 = 4$

risolvendo:

$n_1 = 4 n_0$ e $5 n_0 = 10^7\ m^{-1}$

$$\begin{cases} n_0 = 0.2\cdot 10^7\ m^{-1} \\ n_1 = 0.8\cdot 10^7\ m^{-1} \end{cases}$$

$$\sigma = e(n_0\mu_0 + n_1\mu_1) = 1.6\cdot 10^{-19}\,C\,(0.2\cdot 10^7\,m^{-1}\cdot 0.192\ m^2/Vs +$$
$$+ 0.8\cdot 10^7\,m^{-1}\cdot 0.065\ m^2/Vs) =$$
$$= 1.45\cdot 10^{-13}\ \frac{Cm}{Vs} = 1.45\cdot 10^{-13}\ \frac{Am}{V} = 1.45\cdot 10^{-13}\ \Omega^{-1} m$$

NB: In 1D la conducibilità viene data in $\Omega^{-1} m$, in 3D in $\Omega^{-1} m^{-1}$

ESERCIZIO 8

a) Stimare la resistività del GaAs intrinseco a temperatura ambiente ($T = 290K$) sapendo che:

$E_g = 1.4 eV$; $N_c = 4 \cdot 10^{23} m^{-3}$; $N_v = 8.1 \cdot 10^{24} m^{-3}$;

$\mu_e = 8500 \, cm^2 V^{-1} s^{-1}$; $\mu_h = 400 \, cm^2 V^{-1} s^{-1}$; $g = \frac{1}{5}$

b) Se il semiconduttore è drogato n, con concentrazione di impurezze $N_D = 10^{14} cm^{-3}$ ed energia di ionizzazione delle impurezze $\varepsilon_d = 0.01 meV$ tale che tutte le impurezze siano ionizzate a temperatura ambiente, si chiede di:

b1) scrivere l'equazione di neutralità di carica

b2) determinare la posizione del potenziale chimico, sapendo che per un semiconduttore di tipo n, in approssimazione di non degenerazione, $n = N_c \exp\left[\frac{\mu - \varepsilon_c}{k_B T}\right]$ e valutare se a T ambiente vale l'approssimazione di non degenerazione.

b3) calcolare il nuovo valore della resistività, assumendo che la mobilità dei portatori non sia cambiata. Determinare se il comportamento è intrinseco o estrinseco. prima

b4) tracciare un grafico qualitativo di $\ln n(T)$ vs $(1/k_BT)$ per il semiconduttore drogato. Specificare il valore delle pendenze e il valore delle concentrazioni nei vari regimi. Determinare il valore approssimato della temperatura T_1 che segna il passaggio dal limite di alte temperature a quello di temperature intermedie.

Soluzione

a) $\sigma = n e \mu_e + p q \mu_h$

$$\rho = \frac{1}{\sigma} = \frac{1}{n e \mu_e + p q \mu_h}$$

per un semiconduttore intrinseco $n = p = n_i$:

$$\rho = \frac{1}{n_i e} \frac{1}{\mu_e + \mu_h}$$

$$n_i = \sqrt{N_C N_V} \exp\left[-\frac{E_g}{2 k_B T}\right] = \left(4 \cdot 10^{23} m^{-3} \cdot 8.1 \cdot 10^{24} m^{-3}\right)^{1/2} \exp\left[-\frac{1.4\, eV}{2 \cdot 8.6 \cdot 10^{-5} eV K^{-1} \cdot 290 K}\right]$$

$$= 1.16 \cdot 10^{12}\ m^{-3}$$

da cui:

$$\rho = \frac{1}{1.16 \cdot 10^{12} m^{-3} \cdot 1.6 \cdot 10^{-19} C} \frac{1}{(8500 + 400) \cdot 10^{-4}\ m^2 V^{-1} s^{-1}} = 6{,}05 \cdot 10^{6}\ \Omega m$$

b1) Gli stati donatori sono assunti essere completamente ionizzati, per cui l'equazione di neutralità di carica

$$n = p + \underbrace{N_d^+}_{\text{densità donori ionizzati}} = p + \underbrace{N_d}_{\text{densità donori}}$$

b2) A 290 K, $N_D = 10^{14}\ cm^{-3} = 10^{20}\ m^{-3}$ è molto maggiore di $n_i = 1.16 \cdot 10^{12}\ m^{-3}$, dunque $n \simeq N_D$.

(potevamo stimare n anche moltiplicando l'eq. di neutralità di carica per ~~n_i~~ n e sfruttare $n_i^2 = pn$: risolvendo per n:

$$n^2 = pn + n N_D \rightarrow n^2 = n_i^2 + n N_D$$

$$n^2 - N_D n - n_i^2 = 0$$

$$n = \frac{N_D \pm \sqrt{N_D^2 + 4 n_i^2}}{2}$$)

usiamo $n = N_c \exp\left[\frac{\mu - E_c}{k_B T}\right]$ con $n = N_D$ per trovare μ $\rightarrow$

$$E_c - \mu = k_B T \ln \frac{N_c}{N_D} = 8.617 \cdot 10^{-5} eV K^{-1} \cdot 290 K \ln \frac{4 \cdot 10^{23} m^{-3}}{10^{20} m^{-3}} =$$

$$= 0.207 \ eV$$

l'ipotesi di non degenerazione è: $\frac{E_c - \mu}{k_B T} \gg 1$

$$\left.\frac{E_c - \mu}{k_B T}\right|_{290K} = \ln \frac{N_c}{N_D} = 8.3$$ e quindi l'ipotesi è giustificata

b3) Abbiamo già visto che a 290K, $n \sim N_D$ quindi siamo in regime estrinseco. ~~Vediamo~~ troviamo p:

$$p = \frac{n_i^2}{n} = \frac{n_i^2}{N_D} = 1.35 \cdot 10^4 \ m^{-3} \ll n_i, n$$

$\rightarrow \boxed{p \ll n}$ regime estrinseco per drogaggio di tipo n

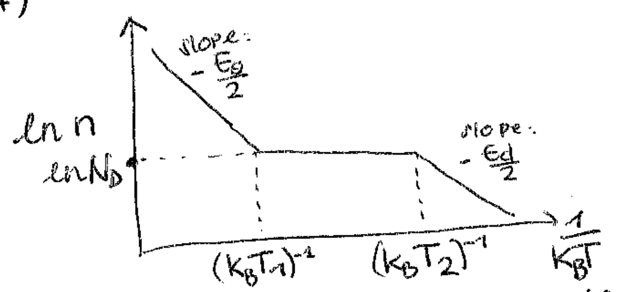
Qui possiamo trascurare i portatori di tipo p:

$$\rho = \frac{1}{n e \mu_e} = \frac{1}{N_D e \mu_e} = (10^{20} m^{-3} \cdot 1.6 \cdot 10^{-19} C \cdot 8500 \cdot 10^{-4} m^2 V^{-1} s^{-1}) =$$

$$= 7.35 \cdot 10^{-2} \ \Omega m$$

Nota: la mobilità a bassa temperatura diminuisce a causa dell'aumento della concentrazione di impurezze.
A temperatura ambiente, la mobilità è tipicamente dominata dalla diffusione sul reticolo (da fononi) per cui non varia apprezzabilmente con il drogaggio: questo è il motivo per cui μ_e rimane la stessa del punto a).

b4)



- Alte temperature: slope: $-\frac{E_g}{2} = 0.7$ eV
- Basse temperature: slope $-\frac{E_d}{2} = 0.005$ eV
- regione intermedia: n è costante e pari al drogaggio N_D

~~Stima~~ T_1: passaggio da alte temperature a temperature intermedie

T_2: passaggio da medie temperature a temperature basse

<u>Stima di T_1</u>: T_1 può essere determinata imponendo la relazione di uguaglianza fra portatori →

intrinseci ed estrinseci, cioè:

$T > T_1$ vale $n = n_i$

$T < T_1$ vale $n = N_D$

a $T = T_1$ i due andamenti devono incontrarsi:

$$n_i = N_D$$

$$\sqrt{N_C N_V}\, \exp\left[-\frac{E_g}{2k_B T_1}\right] = N_D$$

Tale
$$-\frac{E_g}{2k_B T_1} = \ln\frac{N_D}{\sqrt{N_C N_V}} = -\ln\frac{\sqrt{N_C N_V}}{N_D} = -\ln\left(\frac{N_C N_V}{N_D^2}\right)^{\frac{1}{2}} = -\frac{1}{2}\ln\frac{N_C N_V}{N_D^2}$$

$$T_1 = \frac{E_g}{k_B}\left[\ln\frac{N_C N_V}{N_D^2}\right]^{-1} = \frac{1.4\,eV}{8.62\cdot 10^{-5}\,eV\,K^{-1}}\left(\ln\frac{4\cdot 10^{23}\cdot 8.1\cdot 10^{24}}{(10^{20})^2}\right)^{-1} = 830\,K$$

<u>Stima T_2</u>: T_2 può essere stimata dall'intersezione tra il regime intermedio e quello a basse temperature: (regime ionizzazione)

$T > T_2$ $\quad n = N_D$

$T < T_2$ $\quad n = \sqrt{\frac{N_C N_D}{2}}\, \exp\left[-\frac{E_C - E_d}{2k_B T}\right]$

$E_C - E_d = \epsilon_d$ quello della slope!

a $T = T_2$ devono valere entrambe, per cui:

$$N_D = \sqrt{\frac{N_C N_D}{2}}\, \exp\left[-\frac{E_C - E_d}{2k_B T_2}\right]$$

da cui:

$$\frac{2N_D^2}{N_C N_D} = \exp\left[-\frac{E_C - E_d}{k_B T_2}\right]$$

$$T_2 = \frac{E_C - E_d}{k_B}\left[\ln\frac{N_C}{2N_D}\right]^{-1}$$

ESERCIZIO 9

Si consideri un semiconduttore drogato con soli donatori.
La costante di Hall fra 30K e 50K è data da:

$$R_H = e^{\frac{A}{T}}$$

Inoltre: $R_H(T=30K) = -7 \cdot 10^{13}$ u.e.s.
$R_H(T=50K) = -1.4 \cdot 10^{14}$ u.e.s.

Calcolare:
a) l'energia di ionizzazione dei donori ϵ_D
b) la concentrazione di atomi donori N_D sapendo che $m_e^* = 0.22\, m_e$ e che $N_C = \frac{1}{4}\left(\frac{2 m_e^* k_B T}{\pi \hbar^2}\right)^{3/2}$

Soluzione

a) A bassa temperatura la densità degli elettroni è data da:

$$n(T) = \sqrt{\frac{N_C N_D}{2}} \exp\left[-\frac{\epsilon_D}{2k_B T}\right] \sim T^{3/4} \exp\left[-\frac{\epsilon_D}{2k_B T}\right] \quad \text{(teoria)}$$

$$R_H = -\frac{1}{qnc} \Rightarrow n = -\frac{1}{qc}\frac{1}{R_H} \sim e^{-\frac{A}{T}} \quad \text{(esperimento)}$$

per cui: $A = \frac{\epsilon_D}{2k_B}$

per calcolare A sfrutto entrambi i dati di R_H a 30K e 50K:

$$\frac{R_H(30K)}{R_H(50K)} = \exp\left[A\left(\frac{1}{30K} - \frac{1}{50K}\right)\right] \rightarrow A = \ln\left(\frac{R_H(30)}{R_H(50)}\right)\left(\frac{1}{30} - \frac{1}{50}\right)^{-1} K$$

$$A = \ln\left(\frac{7}{0.14}\right) \cdot 75\, K = 293,4\, K$$

$$\rightarrow \epsilon_D = 2k_B A = 50.6\ meV$$

b) Prendendo il quadrato di $n(T) = \sqrt{\frac{N_C N_D}{2}} \exp\left[-\frac{\epsilon_D}{2k_B T}\right]$ si trova N_D →

$$n^2(T) = \frac{N_c(T)\, N_d}{2}\, e^{-\frac{\varepsilon_D}{k_B T}}$$

$$\rightarrow N_d = \frac{2n^2(T)}{N_c(T)}\, e^{\frac{\varepsilon_D}{k_B T}} = \frac{2}{N_c(T)}\, \frac{1}{(qcR_H)^2}\, e^{\frac{\varepsilon_D}{k_B T}}$$

N_c dovrebbe variare poco con la temperatura, quindi il calcolo si può effettuare a 30k o 50k (N_D è invece indipendente da T). Calcolando a 30k:

$$N_c\Big|_{30k} = \frac{1}{4}\left(\frac{2m_e^* k_B T}{\pi \hbar^2}\right)^{3/2} = \frac{1}{4}\left(\frac{2 \cdot 0.22 \cdot 9.11 \cdot 10^{-31}\,kg \cdot 1.38 \cdot 10^{-23}\,J\,K^{-1}\, 30k}{\pi\, (1.054 \cdot 10^{-34})^2 J^2\, s^2}\right)^{3/2} =$$

$$= 8,20 \cdot 10^{22}\, m^{-3} = 8,20 \cdot 10^{16}\, cm^{-3}$$

$$N_d = \frac{2}{(8,20 \cdot 10^{16} cm^{-3})} \frac{\exp[58.68/30]}{(4.8 \cdot 10^{-10} Fr)^2\, (2.99 \cdot 10^{10} \tfrac{cm}{s})^2 (7 \cdot 10^{-13} ues)^2} =$$

$$= 7.55 \cdot 10^{13}\, cm^{-3}$$

~~quando~~
Calcolando a 50k, $N_d = 3.51 \cdot 10^{13}\, cm^{-3}$

→ Perchè viene diverso?
Migliorate la stima di N_d includendo la dipendenza di ~~T~~ $n(T)$ da $T^{3/4}$ ...

ESERCIZIO 10

Nel modello di Drude la conducibilità elettrica è $\sigma = \frac{n e^2 \lambda}{m v_T}$, dove n è la densità dei portatori, λ è il cammino libero medio e v_T la velocità termica.

In questo modello stimare la resistività ρ dell'Ag monovalente, a temperatura ambiente (struttura fcc, peso atomico $A = 108$, densità di massa $10.5 \cdot 10^3\ kg\,m^{-3}$) assumendo che ogni atomo contribuisca con i soli elettroni di valenza, con cammino libero medio λ pari a 100 volte la distanza fra atomi primi vicini e che l'energia cinetica media di ciascun elettrone sia uguale all'energia di Fermi che è pari a 5.5 eV.

Soluzione

① A : peso atomico $\quad \rho_m$: densità di massa

n_{at} : densità atomica

$$\rho_m = \frac{m_{cella}}{V_{cella}} = \frac{\overset{fcc}{4} \cdot A}{a^3} = n_{at} \cdot A$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a = \left(\frac{4A}{\rho}\right)^{1/3} = \left(\frac{4 \cdot 108 \cdot 1.66 \cdot 10^{-27} \, kg}{10.5 \cdot 10^3 \, kg \, m^{-3}}\right)^{1/3} = 4{,}09 \cdot 10^{-10} \, m \\ n_{at} = \frac{\rho}{A} = 5.86 \cdot 10^{28} \, m^{-3} \end{cases}$$

Visto che l'Ag è monovalente ($\nu = 1$) la densità degli elettroni è pari a quella atomica : $n = \nu n_{at} = n_{at}$

la distanza tra primi vicini è:

$$d = \sqrt{\left(\frac{a}{2}\right)^2 + \left(\frac{a}{2}\right)^2} = \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{\lambda}{100}$$

$$\Rightarrow \lambda = \frac{100}{\sqrt{2}} a = 289{,}2 \cdot 10^{-10} \, m$$

la velocità termica:

$$v_t = v_F = \left(\frac{2E_F}{m}\right)^{1/2} = \left(\frac{2 \cdot 5.5 \, eV \cdot 1.6 \cdot 10^{-19} \, J/eV}{9.01 \cdot 10^{-31} \, kg}\right)^{1/2} = 1.39 \cdot 10^6 \, \frac{m}{s}$$

$$\Rightarrow \sigma = \frac{n e^2 \lambda}{m v_t} = \frac{5.86 \cdot 10^{28} \, m^{-3} \cdot (1.6 \cdot 10^{-19} C)^2 \cdot 289.2 \cdot 10^{-10} \, m}{9.01 \cdot 10^{-31} \, kg \cdot 1.39 \cdot 10^6 \, m/s} = 0{,}346 \cdot 10^8 \, \Omega^{-1} m^{-1}$$

$$\rho = \frac{1}{\sigma} = 2{,}89 \cdot 10^{-8} \, \Omega m$$

Esercizio 11

In un semiconduttore intrinseco la densità degli elettroni di conduzione n a 300 K è:

$$n = N_C e^{(\mu - E_g)/K_B T}$$

dove $E_g = 0.5$ eV, $N_C = 10^{19}$ m^{-3} e il potenziale chimico μ coincide con l'energia di Fermi a T = 0 K. I portatori dei due segni, elettroni in banda di conduzione e lacune in banda di valenza, hanno la stessa massa efficace. Inoltre le misure di trasporto forniscono a 300 K una conducibilità elettrica $\sigma = 1.5 \cdot 10^{-3}\ \Omega^{-1}\mathrm{m}^{-1}$ e una costante di Hall R$_H$ che, nel SI, vale:

$$R_H = \frac{1}{e}\frac{p\mu_p^2 - n\mu_n^2}{(p\mu_p + n\mu_n)^2} = 2 \cdot 10^3 \mathrm{m}^{-3}/\mathrm{C}$$

1. Si ricavino le mobilità delle buche e degli elettroni μ_b e μ_e.
2. Sapendo che la banda di conduzione ha la forma: $E(k) = \frac{10\hbar^2 k^2}{m_0}$, si trovino i tempi medi di scattering τ_b e τ_e.

Costanti e formule utili

$\hbar = 1.054 \cdot 10^{-27}$ erg·s
$e = 1.6 \cdot 10^{-19}$ C
$m_0 = 9.1 \cdot 10^{-31}$ kg
1 eV = $1.6 \cdot 10^{-12}$ erg
1 eV/ K$_B$ = 11605 K

Soluzione

1. Se il semiconduttore è intrinseco si ha $n = p = n_i$, inoltre se le masse efficaci dei portatori sono uguali, allora il potenziale chimico si trova a metà gap $\mu = E_g/2$. Per cui a 300 K:

$$n_i = n = p = N_C exp(-E_g/2K_B T) = 10^{19} exp(-0.5 \cdot 11605/2 \cdot 300) = 6.31 \cdot 10^{14}\ \mathrm{m}^{-3}$$

Conducibilità e costante di Hall nel caso di un semiconduttore intrinseco possono essere riscritte come:

$$\sigma = pe\mu_p + ne\mu_n = n_i e(\mu_p + \mu_n)$$
$$R_H = \frac{1}{e}\frac{p\mu_p^2 - n\mu_n^2}{(p\mu_p + n\mu_n)^2} = \frac{1}{n_i e}\frac{\mu_p - \mu_n}{\mu_p + \mu_n}$$

Mettendole a sistema si ottiene:

$$\mu_p + \mu_n = \frac{\sigma}{n_i e}$$
$$\mu_p - \mu_n = \sigma R_H$$

dalle quali otteniamo le mobilità dei due portatori:

$$\mu_p = \frac{\sigma}{2}\left(\frac{1}{n_i e} + R_H\right) = 1.186 \text{ m}^2\text{V}^{-1}\text{s}^{-1}$$
$$\mu_n = \frac{\sigma}{2}\left(\frac{1}{n_i e} - R_H\right) = 0.786 \text{ m}^2\text{V}^{-1}\text{s}^{-1}$$

2. La massa efficace dell'elettrone si trova derivando due volte la banda di conduzione, inoltre sappiamo che le masse dei portatori sono uguali, per cui:

$$m_e^* = m_p^* = \hbar^2\left(\frac{\partial^2 E_C}{\partial k^2}\right) = \frac{m_0}{20} = 0.455 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$$

conoscendo le mobilità troviamo i tempi di scattering:

$$\tau_p = \frac{\mu_p m_p^*}{e} = 3.37 \text{ s}$$
$$\tau_n = \frac{\mu_n m_n^*}{e} = 2.23 \text{ s}$$

Esercizio 12 - Simulazione prova di esonero AA 2014/2015

Un semiconduttore viene drogato con atomi accettori in concentrazione $N_A = 6.4 \cdot 10^{19}$ m^{-3} ed energia di legame ϵ_a. A T = 10 K le lacune hanno un tempo medio di scattering $\tau_h = 1.2 \cdot 10^{-12}$ s e una mobilità $\mu_h = 0.75$ m^2/Vs. La costante di Hall alla stessa temperatura vale $R_H = 28$ m^3/C. Le masse efficaci di elettroni e lacune sono uguali ed indipendenti dalla temperatura.

1. Determinare ϵ_a e la conducibilità elettrica a T = 10 K sapendo che $\epsilon_g = 25\epsilon_a$, dove ϵ_g è l'energia di gap.

2. Determinare la conducibilità elettrica a T = 300 K sapendo che a questa temperatura $\tau_h = \tau_e/3 = 0.5 \cdot 10^{-13}$ s.

3. Considerate un semiconduttore intrinseco. Quale tipo di drogaggio si ottiene a temperatura ambiente inserendo nel semiconduttore un'impurezza ogni 100 atomi del semiconduttore? Quest'ultimo cristallizza in una struttura fcc di costante reticolare a=5.65 Å.

Costanti e formule utili

$\hbar = 1.054 \cdot 10^{-34}$ J·s $= 6.583 \cdot 10^{-16}$ eV·s
$K_B = 1.38 \cdot 10^{-23}$J $\cdot$ K^{-1} $= 1.38 \cdot 10^{-16}$ erg/K $= 8.62 \cdot 10^{-5}$ eV/K
$e = 1.6 \cdot 10^{-19}$ C
$m_0 = 9.1 \cdot 10^{-31}$ kg
1 eV = 11605 K
$k_F = \left(3\pi^2 \frac{N}{V}\right)^{\frac{1}{3}}$

Soluzione

1. A 10 K si ha:

$$p(10\text{K}) = \frac{1}{qR_H(10\text{K})} = 2.23 \cdot 10^{17} \text{ m}^{-3}$$
$$\sigma(10\text{K}) = qp\mu_h = \frac{\mu_h}{R_H(10\text{K})} = 2.7 \cdot 10^{-2}\text{m}^{-1}\Omega^{-1}$$

Inoltre vale:

$$p(T) = \sqrt{\frac{N_V(T)N_A}{2}} \exp\left(-\frac{\epsilon_a}{2K_BT}\right) \quad \text{con} \quad N_V(T) = \frac{1}{4}\left(\frac{2m_V^* K_B T}{\pi\hbar^2}\right)^{3/2}$$

invertendola si trova l'energia di legame degli accettori:

$$\epsilon_a = -2K_BTln\left(p(T)\sqrt{\frac{2}{N_V(T)N_A}}\right)$$

la massa m_V^* che compare in $N_V(T)$ la prendiamo dalla mobilità a 10 K:

$$m_V^* = \frac{q\tau_h}{\mu_h} = 2.56 \cdot 10^{-31} \text{ Kg} \quad \Longrightarrow \quad N_V(10\text{K}) = 2.28 \cdot 10^{22} \text{ m}^{-3}$$

Ora abbiamo tutti i dati per trovare ϵ_a:

$$\epsilon_a = -2K_B(10\text{K})ln\left(p(10\text{K})\sqrt{\frac{2}{N_V(10\text{K})N_A}}\right) = 165K_BK = 14.2 \text{ meV}$$

2. a 300 K dobbiamo controllare la densità di portatori intrinseci per capire in quale regime siamo:

$$p_i(T) = \sqrt{N_C(T)N_V(T)}\exp\left(-\frac{\epsilon_g}{2K_BT}\right) = \sqrt{N_C(T)N_V(T)}\exp\left(-\frac{25\epsilon_a}{2K_BT}\right)$$

Inoltre, dato che le masse sono uguali e indipendenti dalla temperatura si ha che:

$$\frac{N_V(T_1)}{N_V(T_2)} = \frac{N_C(T_1)}{N_V(T_2)} = \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{3/2}$$

Con $T_1 = 300$ K e $T_2 = 10$ K otteniamo:

$$p_i(300\text{K}) = N_V(10\text{K})\left(\frac{300}{10}\right)^{3/2}\exp\left(-\frac{4125}{600}\right) = 3.87\cdot 10^{21} \text{ m}^{-3}$$

poichè $p_i >> N_A$ siamo in regime intrinseco per cui:

$$\sigma(300\text{K}) = qp_i(\mu_h + \mu_e) = \frac{q^2}{m^*}p_i(\tau_h + \tau_e) = \frac{4q^2}{m^*}p_i\tau_h = 77.4 \text{ m}^{-1}\Omega^{-1}$$

3. Il drogaggio cercato (di tipo n o p non ci interessa ora) è 1/100 della densità atomica del solido:

$$N_{drog} = \frac{N}{V}\frac{1}{100} = \frac{4}{a^3}\frac{1}{100} = 2.22\cdot 10^{26} \text{ m}^{-3}$$

Esercizio 13 - Es. 4 Appello I AA 2014/2015

Un semiconduttore viene drogato con atomi donori in concentrazione N$_D$. Una misura a diverse temperature della costante di Hall nel sistema ha dato i seguenti risultati: a 800 K è nulla mentre nell'intervallo di temperature (220-260) K essa risulta in ottima approssimazione costante e pari a -0.189 C^{-1}m^3. Inoltre è noto che la temperatura di cross-over tra il regime ad alte temperature e il regime a temperature intermedie è T*=300 K; che la transizione di Mott avviene ad una concentrazione di impurezze pari a $N_{\text{Mott}} = 3.73 \cdot 10^{24}$ m^{-3}; che le masse di lacune ed elettroni sono uguali fra loro e pari alla massa dell'elettrone m_0. Le mobilità e le masse dei portatori non dipendono dalla temperatura. La mobilità degli elettroni vale $\mu_e = 50$ cm^2/Vs. La costante dielettrica relativa del materiale è $\epsilon_r = 14$. Determinare:

1. La concentrazione del drogaggio N$_D$.

2. L'energia di legame dell'impurezza nel modello idrogenoide.

3. L'energia di gap supposta indipendente dalla temperatura.

4. La conducibilità a 800 K.

S ricordano le seguenti formule:

- Energia di legame e raggio dell'orbita nel modello idrogenoide

$$\epsilon_n = \frac{m_e^*}{m_0}\frac{1}{\epsilon_r^2}\frac{1}{n^2}\text{Ry}\,; \quad a_n = \frac{m_0}{m_e^*}\epsilon_r n^2 a_B$$

- La costante di Hall in presenza di due portatori (h lacune, e elettroni), nel sistema SI

$$R_H = \frac{1}{q}\frac{p\mu_h^2 - n\mu_e^2}{(p\mu_h + n\mu_e)^2}$$

Soluzione

1. La costante di Hall è costante tra 220 K e 160 K, quindi in questo intervallo la densità degli elettroni n è costante e pari al drogaggio N$_D$ (regime intermedio):

$$R_H = -\frac{1}{qn} = -\frac{1}{qN_D} \qquad \Longrightarrow \qquad N_D = \frac{-1}{qR_H} = \frac{1}{1.6\cdot 10^{-19}\cdot 0.189}\ \text{m}^{-3} = 3.3\cdot 10^{19}\ \text{m}^{-3}$$

A queste temperature non si può essere in regime intrinseco perchè qui si avrebbe:

$$R_H = \frac{1}{qn_i}\frac{\mu_p - \mu_e}{\mu_p + \mu_e}$$

il testo ci dice che $\mu_p = \mu_e$ a tutte le temperature, per tanto nel regime intrinseco si deve avere sempre $R_H = 0$.
Inoltre non possiamo neanche essere nel regime a basse temperature perchè qui la densità dei maggioritari (n) dipende dalla temperatura e dunque necessariamente anche R_H.

2.

$$N_{\text{Mott}} = \left(\frac{4}{3}\pi a_n^3\right)^{-1} \qquad \Longrightarrow \qquad a_n = \left(\frac{4}{3}\pi N_{\text{Mott}}\right)^{-1/3} = 4\ \text{nm}$$

Si ha: $\epsilon_n \; a_n = \frac{R_y a_B}{\epsilon_r}$, dalla quale possiamo trovare l'energia di legame cercata ($\epsilon_n = \epsilon_d$) :

$$\epsilon_d = \frac{R_y a_B}{\epsilon_r a_n} = \frac{13.6 \cdot 0.05}{14 \cdot 4} \text{ eV} = 0.012 \text{ eV}$$

3. A T* l'andamento a temperature intermedie ($n(T) = N_D$) deve incontrarsi con l'andamento ad alte temperature ($n(T) = n_i(T)$, $n_i(T)$ è la densità di portatori instrinseci), ovvero a T* deve valere $N_D = n_i(T^*)$:

$$N_D = \sqrt{N_C \; N_V} \; \exp\left[-\frac{E_g}{2K_B T^*}\right]$$

dove $N_{C,V} = 2.534 \left(\frac{m^*_{C,V}}{m_0} \frac{T}{300 \text{ K}}\right)^{3/2} \cdot 10^{25} \text{ m}^{-3}$ sono le densità degli stati della banda di conduzione/valenza (Grosso, pag. 477). Poichè si ha che $m^*_C = m^*_V = m_0$ ad ogni temperatura, le due densità sono uguali fra loro ad ogni temperatura. Calcoliamo l'energia della gap:

$$N_C(T^*) = 2.534 \cdot 10^{25} \text{ m}^{-3}$$

$$E_g = 2K_B T^* \; \ln\left(\frac{N_C(T^*)}{N_D}\right) = 600 \text{ K} \; \ln\left(\frac{2.534 \cdot 10^{25}}{3.3 \cdot 10^{19}}\right) = 8131 \cdot K_B \text{ K } = 0.7 \text{ eV}$$

4. A 800 K ($> T^*$) siamo in regime intrinseco, elettroni e lacune hanno dunque stessa concentrazione, pari a quella intrinseca ($n = p = n_i$), e, quanto detto prima anche stessa mobilità. . La conducibilità è pertanto:

$$\sigma(T) = q \; (n(T)\mu_e + p(T)\mu_h) = q \, n_i(T) \; (\mu_e + \mu_h) = 2 \; q \; n_i(T) \; \mu_e$$

A 800 K si ha pertanto:

$$n_i(800 \text{ K}) = 2.534 \left(\frac{800}{300}\right)^{3/2} \; \exp\left[-\frac{8131}{1600}\right] \cdot 10^{25} \text{ m}^{-3} = 6.85 \cdot 10^{23} \text{ m}^{-3}$$

$$\sigma(800 \text{ K}) = 2 \cdot 1.6 \cdot 10^{-19} \cdot 6.58 \cdot 10^{23} \cdot 50 \cdot 10^{-4} \text{ C m}^{-1}/\text{V s} = 1096 \text{ m}^{-1}\Omega^{-1}$$

Esercizio 14 - Es. 4 Appello II AA 2014/2015

Si consideri un semiconduttore drogato n alla temperatura di 4 K. La densità degli atomi donatori è $N_D = 10^{13}$ cm^{-3}, la massa degli elettroni di conduzione è $m_e^* = 0.3 m_e$ e l'energia di ionizzazione degli atomi donatori è $\epsilon_d = 30$ meV. Calcolare:

1. La densità degli elettroni nella banda di conduzione;

2. Lo spostamento del potenziale chimico rispetto al minimo della banda di conduzione.

3. Il semiconduttore è degenere o non degenere?

4. Sapendo che in regime intrinseco le densità dei portatori sono $n_i(300\text{ K}) = 4.2{\cdot}10^{13}$ cm^{-3} e $n_i(350\text{ K}) = 6.8{\cdot}10^{14}$ cm^{-3}, trovare il valore della gap del semiconduttore. Eseguire questo calcolo con la massima precisione possibile.

Costanti utili:
$K_B = 1.38 \cdot 10^{-23}$ J/K $= 8.62 \cdot 10^{-5}$ eV/K ; $m_e = 9.11{\cdot}10^{-31}$ kg ; $\hbar = 1.054 \cdot 10^{-34}$ J s $= 6.583{\cdot}10^{-16}$ eV s

Soluzione

1. Nel regime a basse temperature la densità dei portatori maggioritari (di tipo n) è data da:

$$n(T) = \sqrt{\frac{N_C(T) N_D}{2}}\, e^{-\epsilon_d/2K_BT}$$

La densità della banda di conduzione ($N_C(T)$) a 4 K vale:

$$N_C(4\text{ K}) = 2.534 \left(\frac{m_c^*}{m_0}\frac{4\text{ K}}{300\text{ K}}\right)^{3/2} \cdot 10^{19}\text{ cm}^{-3} = 2.534\left(0.3\frac{4}{300}\right)^{3/2} \cdot 10^{19}\text{ cm}^{-3} = 6.4 \cdot 10^{15}\text{ cm}^{-3}$$

mentre $K_BT|_{4\text{ K}} = 3.448 \cdot 10^{-4}$ eV, risulta quindi:

$$n(4\text{ K}) = \sqrt{\frac{6.4 \cdot 10^{15} \cdot 10^{13}}{2}}\, e^{-30/2\cdot 0.3448}\text{ cm}^{-3} = 2.3 \cdot 10^{-5}\text{ cm}^{-3}$$

2. Il potenziale chimico si può trovare dalla relazione generale degli elettroni in banda di conduzione $n(T) = N_C(T)e^{(\mu - E_C)/K_BT}$. Invertendola si trova:

$$\mu(T) - E_C = K_BT \ln\left[\frac{n(T)}{N_C(T)}\right]$$

Che a 4 K fornisce il valore:

$$\mu(4\text{ K}) - E_C = K_B(4\text{ K}) \ln\left[\frac{n(4\text{ K})}{N_C(4\text{ K})}\right] = -1.6 \cdot 10^{-2}\text{ eV} = -16\text{ meV}$$

3. A 4 K il potenziale chimico è 16 meV sotto il minimo della banda di conduzione, il semiconduttore è non degenere. Infatti a T= 4 K si ha che $K_BT << E_C - \mu$.

4. In regime intrinseco, la densità degli elettroni $n_i(T)$ dipende dalla temperatura come:

$$n_i(T) \sim T^{3/2} e^{-E_g/2K_BT}$$

Calcoliamo il rapporto $n_i(350\ \text{K})/n_i(300\ \text{K})$:

$$\frac{n_i(350\ \text{K})}{n_i(300\ \text{K})} = \left(\frac{350}{300}\right)^{3/2} \exp\left[-\frac{E_g}{2K_B}\left(\frac{1}{350\ \text{K}} - \frac{1}{300\ \text{K}}\right)\right]$$

Invertendo questa relazione si trova l'energia di gap E_g:

$$E_g = -2K_B \ln\left[\frac{n_i(350\ \text{K})}{n_i(300\ \text{K})}\left(\frac{350}{300}\right)^{-3/2}\right]\left(\frac{1}{350\ \text{K}} - \frac{1}{300\ \text{K}}\right)^{-1} =$$

$$= -2(8.62 \cdot 10^{-5}) \ln\left[\frac{6.8 \cdot 10^{14}}{4.2 \cdot 10^{13}}\left(\frac{350}{300}\right)^{-3/2}\right]\left(\frac{1}{350} - \frac{1}{300}\right)^{-1}\ \text{eV} =$$

$$= 0.92\ \text{eV}$$

Esercizio 15 - Es. 4 Appello I AA 2015/2016

Un semiconduttore viene drogato con atomi donori in concentrazione $N_D = 5.2 \cdot 10^{19}$ m^{-3}.
La temperatura che segna il crossover tra il regime ad alte temperature ed il regime a temperature intermedie è $T_1 = 300$ K, mentre la temperatura che segna il crossover tra il regime a temperature intermedie ed il regime a basse temperature è $T_2 = 110$ K.
La mobilità degli elettroni μ_e, la mobilità delle lacune μ_p e le masse efficaci m_e^*, m_p^* dei portatori non dipendono dalla temperatura.
É inoltre noto che $\mu_e = 1.2$ m^{2}V^{-1}s^{-1} e $\mu_p = 0.8$ m^{2}V^{-1}s^{-1}; che le masse efficaci dei portatori sono uguali fra loro ($m_e^* = m_p^*$); che a T = 600 K la densità degli stati in banda di conduzione vale $N_{\mathrm{C}}(600\mathrm{K}) = 4.0 \cdot 10^{24}$ m^{-3}.
Determinare:

1. La conducibilità elettrica a T = 450 K.

2. La conducibilità elettrica a T = 100 K.

3. La conducibilità elettrica a T = 200 K.

4. Il contributo dei portatori minoritari alla conducibilità elettrica a T = 200 K.

Valori delle costanti:

$e = 1.6 \cdot 10^{-19}$ C
$m_0 = 9.11 \cdot 10^{-31}$ Kg
$K_B = 1.38 \cdot 10^{-23}$ J/K $= 8.62 \cdot 10^{-5}$ eV/K
$\hbar = 1.054 \cdot 10^{-34}$ J s $= 6.583 \cdot 10^{-16}$ e Vs

Soluzione esercizio 4

Poichè le masse efficaci dei portatori sono indipendenti dalla temperatura e uguali fra loro, le densità degli stati in banda di conduzione e di valenza sono uguali ad ogni temperatura: $N_C(T) = N_V(T)$.
Inoltre possiamo sempre scrivere $N_C(T)$ in funzione di un suo valore noto (nel nostro caso facciamo riferimento al dato a 600 K), per cui per il nostro semiconduttore valgono le seguenti relazioni:

$$n_i(T) = \sqrt{N_C(T)N_V(T)}\, e^{-E_g/(2K_BT)} = N_C(T)\, e^{-E_g/(2K_BT)}$$
$$N_C(T) = N_C(600)\left(\frac{T}{600}\right)^{3/2}$$

1. T = 450 K $> T_1$, quindi si è in regime intrinseco e valgono:

$$\sigma(T) = n_i(T)e(\mu_e + \mu_p)$$
$$n_i(T) = N_C(600)\left(\frac{T}{600}\right)^{3/2} e^{-E_g/(2K_BT)}$$

L'energia della gap si ricava uguagliando il drogaggio alla densità dei portatori intrinseci a T_1:

$$N_D = n_i(T_1) = N_C(600)\left(\frac{T_1}{600}\right)^{3/2} e^{-E_g/(2K_BT_1)}$$

$$\frac{E_g}{2K_B} = T_1 \ln\left(\frac{N_C(600)}{N_D}\left(\frac{T_1}{600}\right)^{3/2}\right) = (300)\text{K}\ \ln\left(\frac{4\cdot 10^{24}}{5.2\cdot 10^{19}}\left(\frac{1}{2}\right)^{3/2}\right) = 3063.25\ \text{K}$$

Densità dei portatori intrinseci e conducibilità a 450 K sono dunque:

$$n_i(450) = N_C(600)\left(\frac{450}{600}\right)^{3/2} e^{-3063.25\cdot(450^{-1})} = 2.87\cdot 10^{21}\ \text{m}^{-3}$$

$$\sigma(450) = n_i(450)e(\mu_e+\mu_p) = 2.87\cdot 10^{21}\ \text{m}^{-3}\cdot 1.6\cdot 10^{-19}\ \text{C}\cdot 2\ \text{m}^2\text{V}^{-1}\text{s}^{-1} = 9.2\cdot 10^{2}\ \text{m}^{-1}\Omega^{-1}$$

2. T=100 K $< T_2$, quindi si è in regime di basse temperature ($p << n$) e valgono:

$$\sigma(T) = n(T)e\mu_e$$

$$n(T) = \sqrt{\frac{N_C(T)N_D}{2}}\ e^{-\epsilon_D/(2K_BT)}$$

L'energia del livello donore si ricava uguagliando il drogaggio alla densità degli elettroni a T_2:

$$N_D = n(T_2) = \sqrt{\frac{N_C(T_2)N_D}{2}}\ e^{-\epsilon_D/(2K_BT_2)} = \sqrt{\frac{\left(\frac{T_2}{600}\right)^{3/2} N_C(600)N_D}{2}}\ e^{-\epsilon_D/(2K_BT_2)}$$

$$\epsilon_D/K_B = T_2 \ln\left(\frac{N_C(600)}{2N_D}\left(\frac{T_2}{600}\right)^{3/2}\right) = (110)\text{K}\ \ln\left(\frac{4\cdot 10^{24}}{10.4\cdot 10^{19}}\left(\frac{110}{600}\right)^{3/2}\right) = 881.4\text{K}$$

Densità degli elettroni e conducibilità a 100 K sono dunque:

$$n(100) = \sqrt{\frac{N_C(100)N_D}{2}}\ e^{-\epsilon_D/(2K_B(100\ \text{K}))} = \sqrt{\frac{N_C(600)\left(\frac{100}{600}\right)^{3/2} N_D}{2}}\ e^{-\epsilon_D/(2K_B(100\ \text{K}))} = 3.25\cdot 10^{19}\ \text{m}^{-3}$$

$$\sigma(100) = n(100)e\mu_e = 3.25\cdot 10^{19}\ \text{m}^{-3}\cdot 1.6\cdot 10^{-19}\ \text{C}\cdot 1.2\ \text{m}^2\text{V}^{-1}\text{s}^{-1} = 6.24\ \text{m}^{-1}\Omega^{-1}$$

3. A T = 200 K ($T_1 < T < T_2$) si è in regime intermedio, per cui $n \sim N_D$ e $p << n$:

$$\sigma(200) = N_De\mu_e = 5.2\cdot 10^{19}\ \text{m}^{-3}\cdot 1.6\cdot 10^{-19}\ \text{C}\cdot 1.2\ \text{m}^2\text{V}^{-1}\text{s}^{-1} = 9.98\ \text{m}^{-1}\Omega^{-1}$$

4. A T = 200 K i minoritari (lacune) hanno densità e conducibilità elettrica:

$$p = \frac{n_i^2(200)}{n} = \frac{n_i^2(200)}{N_D} = \frac{\left(\frac{200}{600}\right)^3 N_C^2(600)\exp\{-E_g/(K_B\cdot 200)\}}{N_D} = 5.67\cdot 10^{14}\ \text{m}^{-3}$$

$$\sigma_p(200) = p(200)e\mu_p = 7.3\cdot 10^{-5}\ \text{m}^{-1}\Omega^{-1}$$

il contributo è dunque cinque ordini di grandezza minore di quello dei maggioritari.

Esercizio 16 - Es. 4 Appello II AA 2015/2016

Un semiconduttore con costante dielettrica relativa $\epsilon_r = 11$, viene drogato con soli atomi donori. La banda di conduzione può essere ben approssimata a tutte le temperature dall'espressione: $E_c(k) = E_g + Ak^2$, dove E_g è l'energia della gap ed A una costante.
A $T = 450$ K e $T = 800$ K, entrambe in regime instrinseco, le densità degli elettroni valgono $n(450) = 2 \cdot 10^{16}$ cm^{-3} e $n(800) = 2 \cdot 10^{18}$ cm^{-3}. Si sa inoltre che $T = 400$ K segna il passaggio al regime estrinseco, che la transizione di Mott avviene ad una concentrazione di impurezze pari a $N_{\text{Mott}} = 3 \cdot 10^9$ cm^{-3} e che le masse efficaci di elettroni e lacune sono uguali fra loro. Determinare:

1. Il valore dell'energia di gap E_g.

2. Il drogaggio N_D.

3. L'energia di legame delle impurezze ϵ_D.

4. La mobilità elettronica μ_e, sapendo che il tempo di scattering degli elettroni vale $\tau = 4$ ps.

5. Il valore della costante A.

Costanti: $\mathbf{K_B} = 1.38 \cdot 10^{-23}$ J/K $= 8.62 \cdot 10^{-5}$ eV/K, $\boldsymbol{\hbar} = 1.054 \cdot 10^{-34}$ J s$= 6.583 \cdot 10^{-16}$eV s, $\mathbf{e} = 1.6 \cdot 10^{-19}$ C, $\mathbf{m_0} = 9.11 \cdot 10^{-31}$ Kg, $\mathbf{a_B} = 0.05$ nm, $\mathbf{Ry} = 13.6$ eV.
Fattori di conversione: 1 **uma** $= 1.66 \cdot 10^{-24}$ g

Soluzione

1

$$n_i(T) \sim T^{3/2} \exp\left(-\frac{E_g}{2k_BT}\right)$$

$$\frac{n_i(800)}{n_i(450)} = \left(\frac{800}{450}\right)^{3/2} \exp\left[-\frac{E_g}{2k_B}\left(\frac{1}{800k} - \frac{1}{450k}\right)\right]$$

$$E_g = \frac{2k_B}{\left(\frac{1}{800k} - \frac{1}{450k}\right)} \ln\left[\left(\frac{800}{450}\right)^{3/2} \frac{n_i(450)}{n_i(800)}\right] =$$

$$= \frac{2 \cdot 8.62 \cdot 10^{-5}\ eV/k}{\left(\frac{1}{800} - \frac{1}{450}\right) k^{-1}} \ln\left[\left(\frac{80}{45}\right)^{3/2} 10^{-2}\right] = 0{,}29\ eV$$

$$\frac{E_g}{2k_B} = 3849.04\ K$$

② a $T = 400\,k$: $n_i(400) = N_D$

$$N_D = n_i(400) = \left(\frac{400}{450}\right)^{3/2} n(450) \exp\left[-\frac{E_g}{2k_B}\left(\frac{1}{400k} - \frac{1}{450k}\right)\right] =$$

$$= \left(\frac{40}{45}\right)^{3/2} \cdot 2 \cdot 10^{16}\ cm^{-3}\ e^{-3849\left(\frac{1}{400} - \frac{1}{450}\right)} =$$

$$= 5{,}75 \cdot 10^{15}\ cm^{-3}$$

③ $N_{mott} = \frac{1}{\frac{4}{3}\pi a_d^3}$ $\qquad a_d$: raggio orbita impurezza

$$a_n \epsilon_n = \frac{1}{\epsilon_r} R_y a_B$$

$$a_d = \sqrt[3]{\frac{3}{4\pi N_{mott}}}$$

$$e_d = \frac{R_y a_B}{\epsilon_r}\sqrt[3]{\frac{4\pi N_{mott}}{3}} = \frac{13.6\ eV \cdot 0.05 \cdot 10^{-9}\,m}{11 \cdot 10^{-2}\ m}\sqrt[3]{\frac{4\pi \cdot 3 \cdot 10^{9}}{3}} =$$

$$= 0.143 \cdot 10^{-4}\ eV$$

④ $\mu_e = \frac{e\tau}{m_c^*}$ $\qquad N_c(T) = 2.534\left(\frac{m_c^*}{m_o}\frac{T}{300}\right)^{3/2} 10^{19}\ cm^{-3}$

$$N_c(800) = \frac{n_i(800)}{e^{-\frac{E_g}{2k_B(800k)}}} = \frac{2 \cdot 10^{18}\ cm^{-3}}{e^{-\frac{3249.04}{800}}} = 2.46 \cdot 10^{20}\ cm^{-3}$$

$$m_c^* = m_o \frac{300}{800}\left(\frac{N_c(800)}{2.534 \cdot 10^{19}}\right)^{2/3} = 15.54 \cdot 10^{-31}\ kg$$

$$\mu_e = \frac{1.6 \cdot 10^{-19} C \cdot 4\,ps}{15.54 \cdot 10^{-31} kg} = 0.41\ m^2 s^{-1} V^{-1}$$

⑤ $m_e^* = \hbar^2\left[\frac{\partial^2 \epsilon_c}{\partial k^2}\right]^{-1} = \frac{\hbar^2}{2A}$

$$A = \frac{\hbar^2}{2m_e^*} = \frac{1.054 \cdot 10^{-34}\ J.S \cdot 6.583 \cdot 10^{-16}\ eV S}{2 \cdot 15.54 \cdot 10^{-31}\ kg} = 0.22\ eV m^2 =$$

$$= 0.035 \cdot 10^{-37}\ J m^2$$