Scritto - 9 Settembre 2021

Esercizio 1

Si consideri il sistema rappresentato in figura, in cui $m_1 = 3\,\mathrm{kg}$ ed $m_2 = 2\,\mathrm{kg}$. Il coefficiente di attrito dinamico μ_d tra il blocco di massa m_1 ed il piano su cui si muove è dato da $\mu_d = 0.5$. La fune che collega i due blocchi è da considerarsi inestensibile e di massa trascurabile.

- Disegnare le forze agenti sui due blocchi. (**2 punti**).
- Calcolare l'accelerazione a del sistema e la tensione T della fune (**4 punti**).
- Assumendo i blocchi inizialmente in quiete, calcolare il valore minimo del coefficiente di attrito statico μ_s per cui si ha equilibrio statico (**4 punti**).

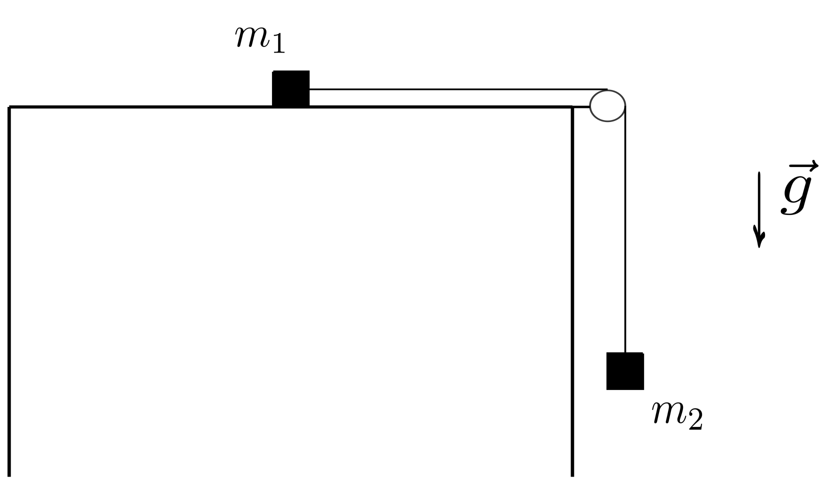

figura 1

Esercizio 2

Un'asta sottile ed omogenea di lunghezza $L = 2\,\mathrm{m}$ e massa $M = 2\,\mathrm{kg}$ è libera di ruotare intorno ad un asse perpendicolare all'asta e passante per il punto O mostrato in figura 2, posto ad una distanza $d = 0.5\,\mathrm{m}$ dal centro di massa. L'asta si trova inizialmente in quiete. Un punto materiale di massa $m = 1\,\mathrm{kg}$, avente velocità $v = 10\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ diretta come in figura 2, urta l'asta in maniera completamente anelastica. Il punto d'impatto si trova ad una distanza $b = 0.75\,\mathrm{m}$ dal punto O. Determinare:

- Il momento d'inerzia dell'asta rispetto all'asse di rotazione (**4 punti**).
- Il momento d'inerzia del sistema dopo l'urto sempre rispetto all'asse di rotazione (**3 punti**).
- La velocità angolare ω del sistema dopo l'urto (**5 punti**).

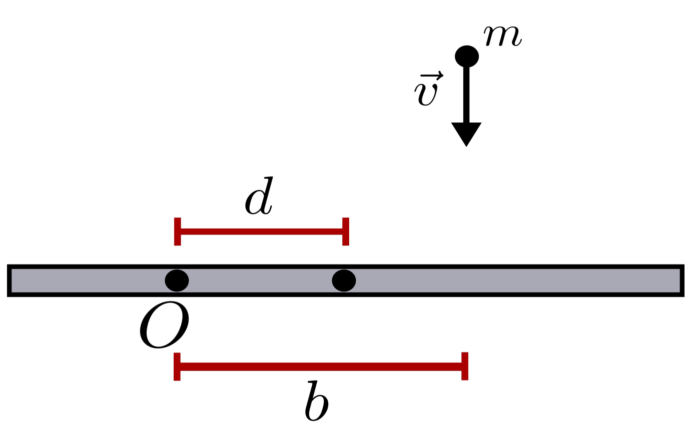

figura 2

Esercizio 3

Una mole di gas perfetto biatomico compie le tre trasformazioni reversibili mostrate in figura 3. La trasformazione $A - B$ è una trasformazione isoterma, la trasformazione $B - C$ è una isocora, mentre la trasformazione $C - D$ è una isobara. Sapendo che $V_A = V_D = 1\,\mathrm{m}^3, T_A = 300\,\mathrm{K}$, $V_B = 2V_A$ e $p_C = p_B/2$, calcolare:

- La pressione p_D e la temperatura T_D del gas nel punto D (**3 punti**).
- I calori Q_{AB}, Q_{BC} e Q_{CD} scambiati dal gas nelle tre trasformazioni (**4 punti**).
- La variazione $\Delta S_{AD} = S_D - S_A$ di entropia del gas tra il punto D ed il punto A (**4 punti**).

($R = 8.314\,\mathrm{J\,K^{-1}\,mol^{-1}}$).

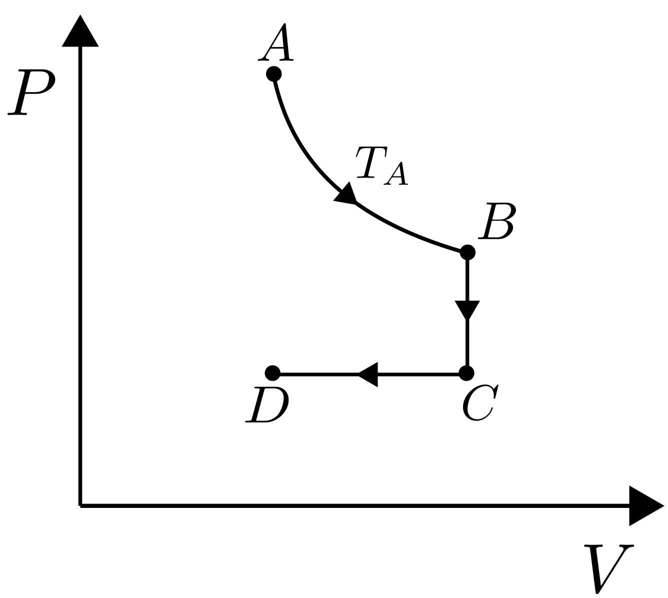

figura 3

Soluzione Esercizio 1

Le forze agenti sul blocco di massa m_1 lungo la direzione del moto sono la tensione T della fune e la forza d'attrito dinamico f_d, mentre sul blocco di massa m_2 agisce la tensione della fune (diretta verso l'alto) e la forza di gravità. Indicando con a l'accelerazione del sistema e con T la tensione della fune, si ha:

$$\begin{cases} m_2 \cdot a &= m_2 \cdot g - T \\ m_1 \cdot a &= T - F_d \end{cases} \tag{1}$$

dove $F_d = \mu_d N = \mu_d m_1 g$ è il modulo della forza di attrito dinamico. Per ricavare l'accelerazione a del sistema è sufficiente sommare membro a membro le due equazioni. Si ottiene:

$$(m_1 + m_2) \cdot a = (m_2 - \mu_d m_1) \cdot g \ , \tag{2}$$

da cui

$$a = \frac{m_2 - \mu_d m_1}{m_1 + m_2} \cdot g \ . \tag{3}$$

Utilizzando i dati forniti dal problema si ricava $a \sim 0.98\,\mathrm{m/s^2}$.
Dalla prima equazione del sistema ricaviamo immediatamente

$$T = m_2 \cdot (g - a) \sim 17.64 \text{ N} \ , \tag{4}$$

Per ricavare il valore minimo del coefficiente di attrito statico μ_s affinchè i blocchi rimangano in quiete, calcoliamo innanzitutto il valore della forza di attrito statico F_a imponendo la condizione di equilibrio:

$$\begin{cases} 0 &= m_2 \cdot g - T \\ 0 &= T - F_a \end{cases} \tag{5}$$

che implica $F_a = m_2 g$. Dal momento che deve essere $F_a \leq \mu_s N = \mu_s m_1 g$, si ha:

$$\mu_s m_1 g \geq m_2 g \implies \mu_s \geq \frac{m_2}{m_1} \sim 0.666 \ . \tag{6}$$

Soluzione Esercizio 2

Il momento d'inerzia di un'asta sottile ed omogenea di massa M e lunghezza L, in rotazione rispetto ad un asse perpendicolare passante per il suo centro di massa, è dato da:

$$I = \frac{ML^2}{12} \; . \tag{7}$$

Per determinare il momento d'inerzia I' rispetto all'asse di rotazione passante per il punto O, è sufficiente utilizzare il teorema di Huygens-Steiner. Si ha quindi:

$$I' = I + Md^2 = M\left(\frac{L^2}{12} + d^2\right) \sim 1.17\,\mathrm{kg} \times \mathrm{m}^2 \; . \tag{8}$$

Dal momento che l'urto è totalmente analestico, il punto materiale di massa m rimane attaccato all'asta, ad una distanza b dal punto O. Per determinare il momento d'inerzia I_{tot} del sistema dopo l'urto, dobbiamo dunque sommare ad I' il contributo del punto materiale. Si ottiene:

$$I_{tot} = I' + mb^2 = I + Md^2 + mb^2 = M\left(\frac{L^2}{12} + d^2 + \frac{m}{M}b^2\right) \sim 1.73\,\mathrm{kg} \times \mathrm{m}^2 \; . \tag{9}$$

Per calcolare la velocità angolare ω del sistema dopo l'urto, utilizziamo invece la conservazione del momento angolare. L'unica forza esterna agente sul sistema è la forza vincolare applicata nel punto O che consente all'asta soltanto rotazioni intorno all'asse. Scegliendo il punto O come polo per il calcolo del momento d'inerzia, si ha che la forza vincolare non produce alcun momento e pertanto il momento angolare del sistema si conserva. Prima dell'urto, essendo l'asta in quiete, si ha che il modulo del momento angolare L_{in} è dato da:

$$L_{in} = mbv \; , \tag{10}$$

mentre dopo l'urto il modulo del momento angolare L_{fin} è dato da

$$L_{fin} = I_{tot}\omega \; , \tag{11}$$

dal momento che il sistema asta + punto materiale è in rotazione rispetto all'asse perpendicolare passante per il punto O. Dalla conservazione del momento angolare si ha dunque:

$$L_{in} = L_{fin} \implies mbv = I_{tot}\omega \implies \omega = \frac{mbv}{I_{tot}} \; , \tag{12}$$

ovvero

$$\omega = \frac{m}{M} \cdot \frac{bv}{\frac{L^2}{12} + d^2 + \frac{m}{M}b^2} \; . \tag{13}$$

Utilizzando i dati del problema si ottiene $\omega = 4.3\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$.

Soluzione Esercizio 3

Nella trasformazione isoterma $A - B$ il volume del gas raddoppia pertanto dall'equazione di stato dei gas perfetti si ha $p_B = p_A/2$. Dal momento che $p_D = p_C = p_B/2$ si ha $p_D = p_A/4$, quindi

$$p_D = \frac{p_A}{4} = \frac{nRT_A}{4V_A} \sim 624\,\mathrm{Pa}\ . \tag{14}$$

Essendo $V_D = V_A$ si ha inoltre

$$T_D = \frac{T_A}{4} = 75\,\mathrm{K}\ . \tag{15}$$

Il calore Q_{AB} assorbito nella isoterma $A - B$ si ricava da:

$$Q_{AB} = \int_A^B p dV = nRT_A \int_{V_A}^{V_B} \frac{dV}{V} = nRT_A \log \frac{V_B}{V_A} = nRT_A \log 2 \simeq 1729\,\mathrm{J}\ , \tag{16}$$

Nella isocora $B - C$, dal momento che il volume del gas non cambia, il calore scambiato Q_{BC} è uguale alla variazione di energia interna del gas, ovvero:

$$Q_{BC} = \Delta U_{BC} = nc_v(T_C - T_B)\ . \tag{17}$$

La temperatura T_C del gas nel punto C si ricava dall'equazione di stato dei gas perfetti:

$$T_C = \frac{p_C V_C}{nR} = \frac{p_B V_B}{2nR} = \frac{T_B}{2}\ . \tag{18}$$

Essendo $T_B = T_A = 300\,\mathrm{K}$, e per un gas perfetto biatomico $c_V = \frac{5}{2}R$, si ha:

$$Q_{BC} = -\frac{5}{2}R\frac{T_A}{2} \sim -3118\,\mathrm{J}\ . \tag{19}$$

Infine, il calore scambiato nella isobara $C - D$ è dato da:

$$Q_{CD} = nc_p(T_D - T_C) = nc_p\left(\frac{T_A}{4} - \frac{T_A}{2}\right) = -\frac{7}{2}R\frac{T_A}{4} \sim -2182\,\mathrm{J}\ , \tag{20}$$

ed abbiamo utilizzato $c_p = c_v + R = \frac{7}{2}R$. Per calcolare la variazione di entropia ΔS_{AD} tra il punto D ed il punto A, calcoliamo l'integrale $\int \frac{dQ}{T}$ su una trasformazione isocora reversibile tra A e D. Dal momento che il volume è costante si ha:

$$dQ = dU = nc_v dT \implies \frac{dQ}{T} = nc_v \frac{dT}{T}\ . \tag{21}$$

Questo implica che

$$\Delta S_{AD} = \int_A^D \frac{dQ}{T} = nc_v \int_{T_A}^{T_D} \frac{dT}{T} = nc_v \log \frac{T_D}{T_A} = -nc_v \log 4 \sim -28.8\,\mathrm{J\,K^{-1}}\ . \tag{22}$$