Terzo scritto- 16 Giugno 2022

Esercizio 1

Al centro di un cilindro conduttore cavo e scarico, di raggio interno $R_1 = 0.8\,\mathrm{m}$, raggio esterno $R_2 = 1\,\mathrm{m}$ e lunghezza infinita, è posto un filo rettilineo, anch'esso infinito e coassiale al cilindro, con densità lineare di carica $\lambda = 5 \times 10^{-10}\mathrm{C\,m^{-1}}$. Determinare:

- La densità di carica superficiale σ indotta sulla superficie interna del cilindro (**3 punti**).
- Il campo elettrico in tutto lo spazio (**5 punti**).
- Il lavoro necessario a portare una carica $q_0 = 1\,\mu\mathrm{C}$ da una distanza $r_a = 1.5\,\mathrm{m}$ ad una distanza $r_b = 0.5\,\mathrm{m}$ (**4 punti**).

Costante dielettrica del vuoto: $\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12}\mathrm{F\,m^{-1}}$.

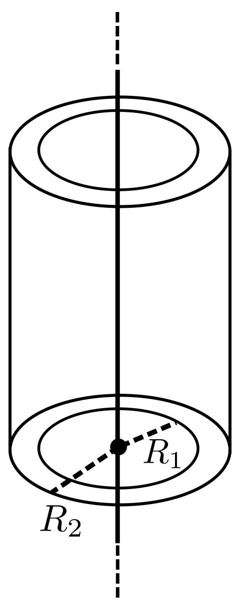

Figura 1

Esercizio 2

Una lamina sottile conduttrice e infinita, è percorsa da una densità lineare di corrente $\vec{J}_\ell(t) = J_0 \cos^2(\omega t)\hat{x}$ con $J_0 = 4\,\mathrm{A\,m^{-1}}$ e $\omega = 20\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$. A distanza $d = 4\,\mathrm{m}$ dalla lamina è posto un cilindro conduttore infinito di raggio $R = 1\,\mathrm{m}$, percorso da una corrente uniforme $i(t) = i_0 \sin(\omega t)$ con $i_0 = 6\,\mathrm{A}$. L'asse di simmetria del cilindro conduttore è diretto lungo l'asse $\hat{x}$ come mostrato in figura 2 a.

- Determinare il modulo $\vec{B}_c(r)$ del campo magnetico generato dal cilindro conduttore al tempo t, in funzione della distanza r dall'asse di simmetria del cilindro (**3 punti**).

- Determinare il campo magnetico totale $\vec{B}$ al tempo t, nel piano passante per l'asse di simmetria del cilindro ed ortogonale alla lamina (**5 punti**).

Nel piano passante per l'asse di simmetria del cilindro ed ortogonale alla lamina, è posta una spira quadrata di lato $L = 0.5\,\mathrm{m}$ e resistenza $R_{spira} = 0.5\,\Omega$. Un lato della spira è parallelo all'asse x, ed il centro della spira è equidistante dalla lamina e dall'asse di simmetria del cilindro, come mostrato in figura 2b. Determinare:

- La corrente $i_{ind}(t^*)$ indotta nella spira al tempo $t^* = \frac{2\pi}{\omega}$ (**4 punti**).

Permeabilità magnetica del vuoto: $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\mathrm{H\,m^{-1}}$.

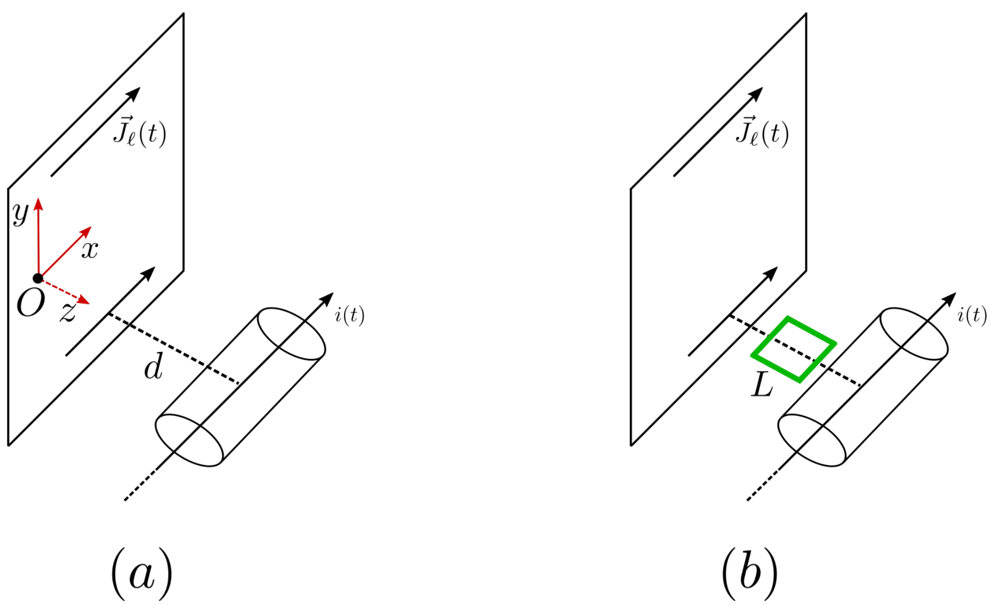

Figura 2

Esercizio 3

In un piano verticale sono posti, ad una distanza $d = 1\,\mathrm{m}$ l'uno dall'altro, due fili conduttori rettilinei, infiniti e paralleli. I due fili sono percorsi da correnti di segno opposto come mostrato in figura 3, dove $i = 2 \times 10^5\,\mathrm{A}$. Tra i due fili è posta una sbarretta conduttrice di lunghezza $L = 0.9\,\mathrm{m}$ e massa $m = 10\,\mathrm{kg}$. La sbarrettà è equidistante dai due fili e può muoversi senza attrito lungo due binari conduttori, formando un circuito chiuso con resistenza complessiva $R = 0.5\,\Omega$. Con riferimento alla figura 3, sapendo che al tempo t_1 la sbarretta si muove verso il basso con velocità $v(t_1) \equiv \frac{dx(t)}{dt}\Big|_{t=t_1} = 300\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ determinare:

- la f.e.m. indotta nel circuito al tempo $t = t_1$ (**4 punti**).

Sempre nelle condizioni del punto precedente:

- determinare il valore di i affinchè la forza complessiva agente sulla sbarretta al tempo t_1 sia nulla (**5 punti**).

(N.B. la sbarretta è sottoposta all'accelerazione di gravità $g = 9.81\,\mathrm{m/s^2}$).

Permeabilità magnetica del vuoto: $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\mathrm{H\,m^{-1}}$.

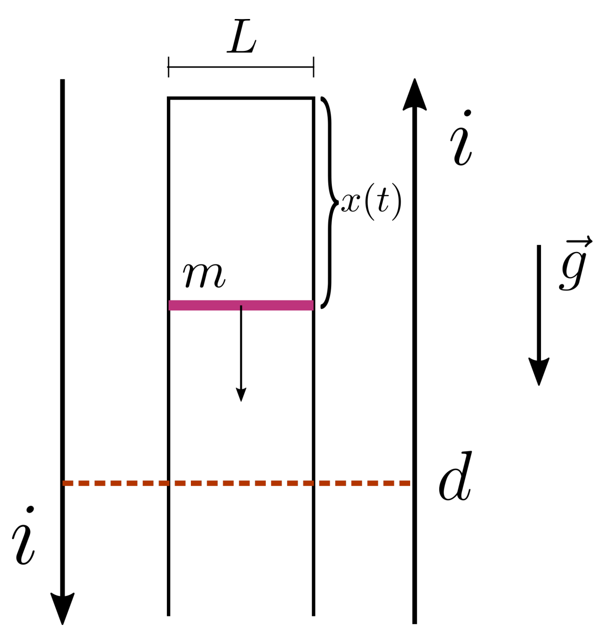

Figura 3

Soluzione Esercizio 1

Il campo elettrico $\vec{E}_{filo}$ generato dal filo conduttore è a simmetria cilindrica. Indichiamo con $S(R, a)$ la superficie di un cilindro coassiale al filo, di raggio R e altezza a. Applicando il teorema di Gauss su questa superficie si ha

$$\phi(E_{filo}) = \int_{S(R,a)} \vec{E}_{filo}(R) \cdot d\vec{S} = 2\pi Ra \cdot E_{filo}(R) = \frac{\lambda a}{\epsilon_0} \ ,$$

dove $E_{filo}(R)$ è il modulo del campo elettrico generato dal filo a distanza R dall'asse, mentre λa è la carica elettrica contenuta all'interno della superficie cilindrica $S(R, a)$. Pertanto:

$$\vec{E}_{filo}(R) = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R}\hat{u}_r \ .$$

La carica superficiale σ indotta sulla superficie interna del cilindro cavo deve essere tale da annullare il campo elettrico al suo interno. Pertanto, indicando con $\vec{E}_\sigma$ il campo elettrico generato dalla carica superficiale σ, deve valere:

$$\vec{E}_{filo}(R) + \vec{E}_\sigma(R) = 0, \quad R_1 < R < R_2 \ . \tag{1}$$

Il campo elettrico $\vec{E}_\sigma$ (anch'esso a simmetria cilindrica) si ricava nuovamente applicando il teorema di Gauss. Per $R > R_1$ si ha:

$$\int_{S(R,a)} \vec{E}_\sigma(r) \cdot d\vec{S} = 2\pi Ra \cdot E_\sigma(R) = \frac{2\pi R_1 a\sigma}{\epsilon_0} \ , \tag{2}$$

dove $2\pi R_1 a\sigma$ è la carica contenuta in $S(R, a)$. Si ha quindi:

$$\vec{E}_\sigma(R) = \frac{R_1\sigma}{\epsilon_0 R}\hat{u}_r, \qquad R > R_1 \ . \tag{3}$$

Imponendo la condizione in Eq. 1 si ottiene pertanto:

$$\frac{\lambda}{2\pi} = -R_1\sigma \implies \sigma = -\frac{\lambda}{2\pi R_1} \simeq -9.95 \times 10^{-11}\mathrm{C/m^2} \ . \tag{4}$$

Dal momento che il cilindro cavo è un conduttore scarico, sulla superficie esterna di raggio R_2 si distribuirà uniformemente una denstità di carica superficiale $\sigma_{ext} = -\sigma\frac{R_1}{R_2}$. In questo modo, la carica totale sulla superficie esterna ha modulo uguale e segno opposto alla carica sulla superficie interna. Il campo elettrico in tutto lo spazio è dato dalla sovrapposizione dei campi generati dal filo e dalle densità di carica superficiali σ e σ_{ext} distribuite rispettivamente sulla superficie interna ed esterna del cilindro cavo. Per $R < R_1$ soltanto il campo elettrico generato dal filo è non nullo, mentre per $R > R_1$ la somma tra il campo E_{filo} ed il campo E_σ è nulla. Il campo elettrico generato da σ_{ext} è invece non nullo soltanto per $R > R_2$ ed è dato da:

$$\vec{E}_{\sigma_{ext}}(R) = \frac{R_2\sigma_{ext}}{\epsilon_0 R}\hat{u}_r = -\frac{R_1\sigma}{\epsilon_0 R}\hat{u}_r = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R}\hat{u}_r, \qquad R > R_2 \ . \tag{5}$$

Riassumendo, il campo elettrico totale è dato da:

$$\vec{E}(R) = \begin{cases} \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R}\hat{u}_r & R < R_1 \\ 0 & R_1 < R < R_2 \\ \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 R}\hat{u}_r & R > R_2 \end{cases} \tag{6}$$

Il lavoro W necessario a portare la carica q_0 da r_a ad r_b è dato invece da:

$$\begin{aligned} W = q_0 \int_{r_b}^{r_a} \vec{E} \cdot d\vec{r} = q_0 \int_{r_b}^{R_1} \vec{E} \cdot d\vec{r} + q_0 \int_{R_1}^{R_2} \underbrace{\vec{E} \cdot d\vec{r}}_{0} + q_0 \int_{R_2}^{r_a} \vec{E} \cdot d\vec{r} \\ = q_0 \int_{r_b}^{R_1} \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} dr + q_0 \int_{R_2}^{r_a} \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} dr \\ = \frac{q_0\lambda}{2\pi\epsilon_0} \log\left(\frac{R_1 r_a}{r_b R_2}\right) \simeq 7.87 \times 10^{-6}\mathrm{J} \ . \end{aligned} \tag{7}$$

Soluzione Esercizio 2

Il campo magnetico $\vec{B}_c$ generato dal cilindro conduttore si ricava applicando il teorema di Ampere. Detta $C(r)$ la circonferenza di raggio r centrata sull'asse di simmetria del cilindro si ha:

$$\int_{C(r)} \vec{B}_c \cdot d\vec{\ell} = 2\pi r B_c(r) = \mu_0 i(r,t) \ , \tag{8}$$

dove $B_c(r)$ è il modulo del campo magnetico e $i(r,t)$ è la corrente concatenata a $C(r)$ al tempo t. Dal momento che la corrente che scorre nel cilindro è distribuita uniformemente si ha:

$$i(r,t) = \begin{cases} i(t) & r \geq R \\ i(t)\frac{r^2}{R^2} & r < R \end{cases} \tag{9}$$

da cui

$$B_c(r) = \begin{cases} \frac{\mu_0 i(t)}{2\pi r} & r \geq R \\ \frac{\mu_0 i(t) r}{2\pi R^2} & r < R \end{cases} \tag{10}$$

Con riferimento alla figura presente nel testo del problema, notiamo che nel piano passante per l'asse di simmetria del cilindro ed ortogonale alla lamina, si ha che quando $i(t) > 0$, $\vec{B}_c$ è diretto come $+\hat{y}$ per $z < d$ e come $-\hat{y}$ per $z > d$. Per quanto riguarda il campo magnetico $\vec{B}_\ell$ generato dalla lamina, questo per simmetria giace nel piano della lamina ed è ortogonale a $\vec{J}_\ell(t)$. Con riferimento al sistema di assi cartesiani indicato nella figura del problema, il campo magnetico $\vec{B}_\ell$ è diretto lungo $-\hat{y}$ per $z > 0$ e lungo $+\hat{y}$ per $z < 0$. Inoltre, sempre per considerazioni di simmetria, il suo modulo non può dipendere da x o y. Per calcolare il suo modulo in funzione della coordinata z, applichiamo il teorema di Ampere prendendo un percorso chiuso rettangolare nel piano $y - z$. Siano $(0, z)$, (h, z) , $(h, -z)$, $(0, -z)$ le coordinate dei vertici del rettangolo in questo piano. Si ha:

$$\int_C \vec{B}_\ell \cdot d\vec{\ell} = 2|\vec{B}_\ell(z)|h = \mu_0 i_{conc.} = \mu_0 |J_\ell(t)|h \implies |\vec{B}_\ell(z)| = \mu_0 \frac{|\vec{J}_\ell(t)|}{2} \tag{11}$$

Pertanto la lamina sottile genera un campo magnetico di modulo costante. Il campo magnetico totale $\vec{B}$ è dato dalla somma di $\vec{B}_\ell$ e $\vec{B}_c$. Nel piano passante per l'asse di simmetria del cilindro ed ortogonale alla lamina si ha quindi:

$$\vec{B}(z) = \begin{cases} \mu_0 \left(\frac{J_0 \cos^2(\omega t)}{2} + \frac{i_0 \sin(\omega t)}{2\pi(d-z)} \right) \hat{y} & z < 0 \\ -\mu_0 \left(\frac{J_0 \cos^2(\omega t)}{2} - \frac{i_0 \sin(\omega t)}{2\pi(d-z)} \right) \hat{y} & 0 < z \leq d - R \\ -\mu_0 \left(\frac{J_0 \cos^2(\omega t)}{2} - \frac{i_0 \sin(\omega t)(d-z)}{2\pi R^2} \right) \hat{y} & d - R < z \leq d + R \\ -\mu_0 \left(\frac{J_0 \cos^2(\omega t)}{2} + \frac{i_0 \sin(\omega t)}{2\pi(z-d)} \right) \hat{y} & z > R + d \end{cases} \tag{12}$$

Per ricavare la corrente indotta $i_{ind}(t)$, calcoliamo il flusso del campo magnetico concatenato alla spira. Il contributo ϕ_{B_ℓ} della lamina sottile al flusso è dato da:

$$\phi_{B_\ell} = \int_{spira} \vec{B}_\ell \cdot d\vec{S} = \mu_0 L^2 \frac{|J_\ell(t)|}{2} = \mu_0 L^2 \frac{J_0}{2} \cos^2(\omega t) \ , \tag{13}$$

mentre il contributo al flusso del cilindro conduttore (ϕ_{B_c}) è dato da:

$$\begin{aligned} \phi_{B_c} &= \int_{spira} \vec{B}_c \cdot d\vec{S} = L \int_{\frac{d-L}{2}}^{\frac{d+L}{2}} -\mu_0 \frac{i(t)}{2\pi(d-z)} dz \\ &= -\mu_0 L \frac{i(t)}{2\pi} \log\left(\frac{d+L}{d-L}\right) = -\mu_0 L \frac{i_0}{2\pi} \log\left(\frac{d+L}{d-L}\right) \sin(\omega t) \ . \end{aligned} \tag{14}$$

Il flusso totale è quindi $\phi_B = \phi_{B_\ell} + \phi_{B_c}$. Utilizzando la legge di Faraday si ricava quindi la corrente indotta:

$$\begin{aligned} i_{ind}(t) &= \frac{\mathcal{E}(t)}{R_{spira}} = -\frac{1}{R_{spira}} \frac{\partial \phi_B}{\partial t} \\ &= \cos(\omega t) \frac{L}{R_{spira}} \mu_0 \omega \left(L J_0 \sin(\omega t) + \frac{i_0}{2\pi} \log\left(\frac{d+L}{d-L}\right)\right) \ . \end{aligned} \tag{15}$$

Al tempo $t^* = \frac{2\pi}{\omega}$ si ha $\sin(\omega t^*) = 0$ e quindi:

$$i_{ind}(t^*) = \mu_0 \omega \frac{L}{R_{spira}} \frac{i_0}{2\pi} \log\left(\frac{d+L}{d-L}\right) \simeq 6 \times 10^{-6} \mathrm{A} \ . \tag{16}$$

Soluzione Esercizio 3

Come noto, il campo magnetico generato da un filo rettilineo ed infinito percorso da corrente i è dato da:

$$\vec{B}(r) = \frac{\mu_0 i}{2\pi r}\hat{u}_\phi \tag{17}$$

dove r è la distanza dal filo. I due fili conduttori del problema sono posti a distanza $d = 1\,\mathrm{m}$ e sono attraversati da correnti di segno opposto. Nella regione di piano verticale compresa tra i due fili, i campi magnetici generati dai due fili sono quindi paralleli. Indicando con y la distanza da uno dei due fili, si ha che il modulo del campo magnetico totale $B(y)$ nella regione di piano compresa tra i due fili è dato da

$$B(y) = \frac{\mu_0 i}{2\pi} \cdot \left(\frac{1}{y} + \frac{1}{d-y}\right) \tag{18}$$

Il campo magnetico è uscente dal piano del foglio. Il flusso concatenato al circuito in funzione della posizione $x(t)$ della sbarretta al tempo t è dato da:

$$\begin{aligned}\phi_B(t) = \int \vec{B}\cdot d\vec{S} &= x(t)\int_{\frac{d-L}{2}}^{\frac{d+L}{2}} dy \frac{\mu_0 i}{2\pi}\cdot\left(\frac{1}{y} + \frac{1}{d-y}\right) \\ &= x(t)\frac{\mu_0 i}{\pi}\log\left(\frac{d+L}{d-L}\right)\end{aligned} \tag{19}$$

La f.e.m. indotta è data da:

$$\mathcal{E}(t) = -\frac{\partial \phi_B(t)}{\partial t} = -v(t)\frac{\mu_0 i}{\pi}\log\left(\frac{d+L}{d-L}\right) \tag{20}$$

Utilizzando i dati del problema si ha che al tempo t_1, $|\mathcal{E}(t_1)| \simeq 71\,\mathrm{V}$. La corrente indotta è invece data da:

$$i_{ind}(t) = -\frac{v(t)}{R}\frac{\mu_0 i}{\pi}\log\left(\frac{d+L}{d-L}\right)\ , \tag{21}$$

e circola in senso orario. Il modulo della forza magnetica F_m agente sulla sbarretta è data da:

$$F_m = |i_{ind}(t_1)|\int_{\frac{d-L}{2}}^{\frac{d+L}{2}} B(y)dy = |i_{ind}(t_1)|\frac{\mu_0 i}{\pi}\log\left(\frac{d+L}{d-L}\right) \tag{22}$$

e si oppone alla forza di gravità. Pertanto il valore che i deve assumere affinchè la risultante delle forze sia nulla al tempo t_1 è dato da:

$$|i_{ind}(t_1)|\frac{\mu_0 i}{\pi}\log\left(\frac{d+L}{d-L}\right) = mg \implies i^2 = \frac{mg}{v(t_1)}\frac{R\pi^2}{\mu_0^2}\cdot\left(\frac{1}{\log\left(\frac{d+L}{d-L}\right)}\right)^2 \tag{23}$$

Utilizzando i dati del problema si ottiene $i \simeq 3.4\times 10^5\mathrm{A}$.