Tavole di derivate e integrali

Alessio Mattia Leonardi[1]

17 Marzo 2021

[1] a.m.leonardi@hotmail.it

Indice

Capitolo 1

La derivata

1.1 Definizione

Definizione di derivata

$$\frac{df(x)}{dx} = f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} \tag{1.1}$$

1.1.1 Esempio

$$\begin{aligned} \frac{d(x^2)}{dx} &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{(x + \Delta x)^2 - x^2}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{x^2 + \Delta x^2 + 2x\Delta x - x^2}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta x(\Delta x + 2x)}{\Delta x} = \\ &= \lim_{\Delta x \to 0} (\Delta x + 2x) = 2x \end{aligned} \tag{1.2}$$

1.2 Derivate notevoli

1.2.1 Funzione costante $f(x) = a, \quad a \in \mathbb{R}$

Costante: $f(x) = a$

$$\frac{da}{dx} = 0 \tag{1.3}$$

1.2.2 Funzione lineare $f(x) = x$

Lineare: $f(x) = x$

$$\frac{dx}{dx} = 1 \tag{1.4}$$

1.2.3 Funzione quadratica $f(x) = x^2$

Quadrato: $f(x) = x^2$

$$\frac{dx^2}{dx} = 2x \tag{1.5}$$

1.2.4 Funzione radicale $f(x) = \sqrt{x}$

Radice quadrata: $f(x) = \sqrt{x}$

$$\frac{d\sqrt{x}}{dx} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \tag{1.6}$$

1.2.5 Potenza generica $f(x) = x^n, \quad n \in \mathbb{R}$

Potenza: $f(x) = x^n$

$$\frac{dx^n}{dx} = n \cdot x^{n-1} \tag{1.7}$$

1.2.6 Funzione esponenziale $f(x) = a^x, \quad a \in \mathbb{R}^+ - \{0\}$

Esponenziale: $f(x) = a^x$

$$\frac{da^x}{dx} = \ln a \cdot a^x \tag{1.8}$$

Caso specifico se $a = e$:

$$\frac{de^x}{dx} = \ln e \cdot e^x = e^x \tag{1.9}$$

1.2.7 Funzione logaritmo $f(x) = \log_a x, \quad a \in \mathbb{R}^+ - \{0\}$

Logaritmo:
$f(x) = \log_a x$

$$\frac{d \log_a x}{dx} = \frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{x} \tag{1.10}$$

Caso specifico se $a = e$:

$$\frac{d \log_e x}{dx} = \frac{d \ln x}{dx} = \frac{1}{\ln e} \cdot \frac{1}{x} = \frac{1}{x} \tag{1.11}$$

1.2.8 Funzione seno $f(x) = \sin x$

Seno:
$f(x) = \sin x$

$$\frac{d \sin x}{dx} = \cos x \tag{1.12}$$

1.2.9 Funzione coseno $f(x) = \cos x$

Coseno:
$f(x) = \cos x$

$$\frac{d \cos x}{dx} = -\sin x \tag{1.13}$$

1.3 Regole di derivazione

1.3.1 Regola della somma

Somma: $h(x) = f(x) \pm g(x)$

$$\frac{dh(x)}{dx} = \frac{d(f(x) \pm g(x))}{dx} = f'(x) \pm g'(x) \tag{1.14}$$

Esempio $h(x) = x^2 + x^3$:

$$\frac{d(x^2 + x^3)}{dx} = \frac{dx^2}{dx} + \frac{dx^3}{dx} = 2x + 3x^2 \tag{1.15}$$

1.3.2 Regola del prodotto

Prodotto: $h(x) = f(x) \cdot g(x)$

$$\frac{dh(x)}{dx} = \frac{d(f(x) \cdot g(x))}{dx} = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x) \tag{1.16}$$

Caso particolare: se $g(x) = a$ cioè è una costante, allora $g'(x) = 0$ e quindi:

$$\frac{d(a \cdot f(x))}{dx} = a \cdot \frac{df(x)}{dx} \tag{1.17}$$

Esempio $h(x) = x^2 \cdot \sin x$:

$$\begin{aligned}\frac{d(x^2 \sin x)}{dx} &= \frac{dx^2}{dx} \cdot \sin x + x^2 \cdot \frac{d \sin x}{dx} = \\ &= 2x \cdot \sin x + x^2 \cdot \cos x\end{aligned} \tag{1.18}$$

1.3.3 Regola del quoziente

Quoziente: $h(x) = f(x)/g(x)$

$$\frac{dh(x)}{dx} = \frac{d\, f(x)/g(x)}{dx} = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g(x)^2} \tag{1.19}$$

Caso particolare: se $f(x) = 1$ ho la derivata della reciproco di una funzione:

$$\frac{d}{dx} \frac{1}{g(x)} = -\frac{g'(x)}{g(x)^2} \tag{1.20}$$

Esempio $h(x) = \sin x/x$:

$$\begin{aligned}\frac{d(\sin x/x)}{dx} &= \frac{1}{x^2} \cdot \left(\frac{\sin x}{dx} \cdot x - \sin x \cdot \frac{dx}{dx} \right) \\ &= \frac{1}{x^2} \cdot (\cos x \cdot x - \sin x \cdot 1)\end{aligned} \tag{1.21}$$

1.3.4 Regola della funzione composta o *regola della catena*

Funzione composta: $h(x) = f(g(x))$

$$\frac{dh(x)}{dx} = \frac{d(f(g(x)))}{dx} = \underbrace{\frac{df(u)}{du}}_{u=g(x)} \cdot \frac{dg(x)}{dx} \tag{1.22}$$

Sostanzialmente si tratta di effettuare il cambio di variabile $u = g(x)$, derivare rispetto a questa variabile u e moltiplicare per la derivata di questa nuova variabile (u) rispetto a quella di partenza (x).

Esempio $h(x) = \sin x^3$**:**

$$\begin{aligned}\frac{d(\sin x^3)}{dx} \underbrace{=}_{u=x^3} \frac{d\sin u}{du} \cdot \frac{dx^3}{dx} = \\ = \cos u \cdot 3x^2 = \\ = \cos x^3 \cdot 3x^2\end{aligned} \tag{1.23}$$

Esempio $h(x) = \ln\cos e^{2x}$**:**

$$\begin{aligned}\frac{d(\ln\cos e^{2x})}{dx} &\underbrace{=}_{u=\cos e^{2x}} \frac{d\ln u}{du} \cdot \frac{d(\cos e^{2x})}{dx} = \\ &= \frac{1}{u} \cdot \frac{d(\cos e^{2x})}{dx} = \\ &\underbrace{=}_{y=e^{2x}} \frac{1}{\cos e^{2x}} \cdot \frac{d(\cos y)}{dy} \cdot \frac{d(e^{2x})}{dx} = \\ &= -\frac{1}{\cos e^{2x}} \cdot \sin y \cdot \frac{d(e^{2x})}{dx} = \\ &\underbrace{=}_{w=2x} -\frac{1}{\cos e^{2x}} \cdot \sin e^{2x} \cdot \frac{d(e^w)}{dw} \cdot \frac{d(2x)}{dx} = \\ &= -\frac{1}{\cos e^{2x}} \cdot \sin e^{2x} \cdot e^w \cdot \frac{d(2x)}{dx} = \\ &= -\frac{1}{\cos e^{2x}} \cdot \sin e^{2x} \cdot e^{2x} \cdot \frac{d(2x)}{dx} = \\ &= -\frac{1}{\cos e^{2x}} \cdot \sin e^{2x} \cdot e^{2x} \cdot 2\end{aligned} \tag{1.24}$$

Capitolo 2

L'integrale indefinito

2.1 Definizione

Definizione di integrale indefinito

$$\int f(x)dx = F(x) + c \implies \frac{dF(x)}{dx} = f(x) \tag{2.1}$$

L'integrazione definisce un insieme di funzioni che differiscono tutte per una costante arbitraria c in quanto la derivata di una costante è 0. Di conseguenza se $F(x)$ è una funzione che soddisfa alla definizione di integrale (che viene detta *primitiva* di $f(x)$), allora lo è anche $F(x) + c$ con $c \in R$.

Esempio:

$$F(x) = \int x^3 dx = \frac{1}{4}x^4 + c \tag{2.2}$$

in quanto:

$$\frac{d(x^4/4 + c)}{dx} = \frac{d(x^4/4)}{dx} + \frac{dc}{dx} = \frac{1}{4} \cdot 4 \cdot x^3 + 0 = x^3 \tag{2.3}$$

Quindi ad esempio $x^4/4 + 2$, $x^4/4 + \sqrt{34}$, $x^4/4 + \pi$, $x^4/4 - 15/4$ etc. sono tutti integrali della funzione x^3.

2.2 Integrali notevoli

2.2.1 Funzione costante $f(x) = a, \quad a \in \mathbb{R}$

Costante: $f(x) = a$

$$\int a\, dx = a \cdot x + c \tag{2.4}$$

2.2.2 Funzione lineare $f(x) = x$

Lineare: $f(x) = x$

$$\int x\,dx = \frac{x^2}{2} + c \tag{2.5}$$

2.2.3 Funzione reciproca $f(x) = 1/x$

Reciproca: $f(x) = 1/x$

$$\int \frac{1}{x}\,dx = \ln|x| + c \tag{2.6}$$

2.2.4 Funzione quadratica $f(x) = x^2$

Quadratica: $f(x) = x^2$

$$\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + c \tag{2.7}$$

2.2.5 Funzione radicale $f(x) = \sqrt{x}$

Radice quadrata: $f(x) = \sqrt{x}$

$$\int \sqrt{x}\,dx = \frac{2}{3} \cdot \sqrt{x^3} + c \tag{2.8}$$

2.2.6 Potenza generica $f(x) = x^n, \quad n \in \mathbb{R}$

Potenza: $f(x) = x^n$

$$\int x^n\,dx = \frac{1}{n+1} \cdot x^{n+1} + c \tag{2.9}$$

2.2.7 Funzione esponenziale $f(x) = a^x, \quad a \in \mathbb{R}^+ - \{0\}$

Esponenziale: $f(x) = a^x$

$$\int a^x\,dx = \frac{1}{\ln a} \cdot a^x + c \tag{2.10}$$

Caso specifico se $a = e$:

$$\int a^x \, dx = \int e^x dx = e^x + c \tag{2.11}$$

2.2.8 Funzione logaritmo $f(x) = \log_a x, \quad a \in \mathbb{R}^+ - \{0\}$

Logaritmo: $f(x) = \log_a x$

$$\int \log_a x \, dx = \frac{1}{\ln a}(x \ln x - x) + c \tag{2.12}$$

Caso specifico se $a = e$:

$$\int \log_a x \, dx = \int \ln x \, dx = (x \ln x - x) + c \tag{2.13}$$

2.2.9 Funzione seno $f(x) = \sin x$

Seno: $f(x) = \sin x$

$$\int \sin x \, dx = -\cos x + c \tag{2.14}$$

2.2.10 Funzione coseno $f(x) = \cos x$

Coseno: $f(x) = \sin x$

$$\int \cos x \, dx = \sin x + c \tag{2.15}$$

2.3 Regole di integrazione

2.3.1 Regola della somma

Somma: $h(x) = f(x) \pm g(x)$

$$\int h(x) \, dx = \int f(x) \pm g(x) \, dx = \int f(x) \, dx \pm \int g(x) \, dx \tag{2.16}$$

Esempio $h(x) = x^2 + x^3$:

$$\int x^2 + x^3 \, dx = \int x^2 \, dx + \int x^3 \, dx = \frac{x^3}{3} + \frac{x^4}{4} + c \tag{2.17}$$

2.3.2 Regola del prodotto per una costante

Prodotto per una costante: $h(x) = a \cdot f(x)$

$$\int h(x)\,dx = \int a \cdot f(x)\,dx = a \int f(x)\,dx \tag{2.18}$$

Esempio $h(x) = 7\sin x$**:**

$$\int 7\sin x\,dx = 7\int \sin x\,dx = -7\cos x + c \tag{2.19}$$

2.3.3 Regola dell'integrazione per parti

Integrazione per parti

$$\int f'(x) \cdot g(x)\,dx = f(x) \cdot g(x) - \int f(x) \cdot g'(x)\,dx \tag{2.20}$$

Esempio $h(x) = \sin x \cdot x$**:**

Considero $\sin x$ come la derivata di $\cos x$. Quindi $f'(x) = \sin x \to f(x) = -\cos x$ mentre $g(x) = x \to g'(x) = 1$

$$\begin{aligned} \int \sin x \cdot x\,dx &= -\cos x \cdot x - \int -\cos x \cdot 1\,dx = \\ &= -\cos x \cdot x + \int \cos x\,dx = \\ &= -\cos x \cdot x + \sin x + c \end{aligned} \tag{2.21}$$

2.3.4 Regola dell'integrazione per sostituzione (1)

Si utilizza quando la funzione integranda è una funzione composta, effettuando il cambio di variabile $x = g(t)$ e il cambio di differenziale $dx = g'(t)dt$.

Integrali per sostituzione pt.1

$$\int f(x)\,dx \underbrace{=}_{x=g(t)} \int f(g(t)) \cdot g'(t)\,dt \tag{2.22}$$

Esempio $h(x) = \sin 3x$**:**

Effettuando la sostituzione $x \to g(t) = t/3$ e $dx = dt/3$:

$$\begin{aligned} \int \sin 3x \, dx &= \int \sin t \frac{dt}{3} = \\ &= \frac{1}{3} \int \sin t \, dt = \\ &= -\frac{1}{3} \cos t + c = -\frac{1}{3} \cos 3x + c \end{aligned} \tag{2.23}$$

2.3.5 Regola dell'integrazione per sostituzione (2)

Si usa quando la funzione integranda è una funzione composta del tipo $f(g(x)) \cdot g'(x)$. Allora si pone $t = g(x)$ e $dt = g'(x)dx$.

Integrali per sostituzione pt.2

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x) \, dx \underbrace{=}_{t=g(x)} \int f(t) \, dt \tag{2.24}$$

Esempio $h(x) = \tan x$**:**

$$\int \tan x \, dx = \int \frac{\sin x}{\cos x} dx \tag{2.25}$$

Effettuando la sostituzione $t \to g(x) = \cos x$, allora $dt = -\sin x \, dx$:

$$\begin{aligned} \int \tan x \, dx &= \int \frac{\sin x}{\cos x} dx = \\ &= \int \frac{-d(\cos x)}{\cos x} = \\ &= -\int \frac{dt}{t} = \\ &= -\ln|t| + c = \\ &= -\ln|\cos x| + c \end{aligned} \tag{2.26}$$

2.4 Integrale definito

Teorema fondamentale del calcolo integrale

$$\int_a^b f(x) \, dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a) \tag{2.27}$$

dove

$$F(x) = \int f(x) \, dx \tag{2.28}$$

Esempio $h(x) = x^2,\ x \in [4, 8]$**:**

$$\int_4^8 x^2\,dx = \frac{x^3}{3}\bigg|_4^8 = \frac{8^3}{3} - \frac{4^3}{3} = \frac{448}{3} \tag{2.29}$$

2.5 Cambio di variabile negli integrali definiti (pt.1)

Quando si effettua un cambio di variabile, anche gli estremi di integrazione vengono modificati dal cambio stesso di variabile:

Cambio di variabile

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f(g(t)) \cdot g'(t)\,dt = F(t)\bigg|_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} = F(g^{-1}(b)) - F(g^{-1}(a)) \tag{2.30}$$

Esempio $h(x) = \sin x/2,\ x \in [4, 8]$**:**

$$\int_4^8 \sin{(x/2)}\,dx \tag{2.31}$$

Effettuando la sostituzione $x \to g(t) = 2t$ e $dx = 2dt$, allora:

- $x = 4 \to t = 4/2 = 2$ (che corrisponde a calcolare $g^{-1}(4)$)
- $x = 8 \to t = 8/2 = 4$ (che corrisponde a calcolare $g^{-1}(8)$)

Allora:

$$\begin{aligned}\int_4^8 \sin{(x/2)}\,dx &= \int_2^4 \sin t\, 2dt = \\ &= 2\int_2^4 \sin t\,dt \\ &= -2 \cdot \cos t\bigg|_2^4 = 2 \cdot (-\cos 4 - (-\cos 2)) = 2 \cdot (\cos 2 - \cos 4)\end{aligned} \tag{2.32}$$

2.6 Cambio di variabile negli integrali definiti (pt.2)

Analogamente quando si effettua l'altro cambio di variabile (Eq. 2.24), gli estremi di integrazione vengono modificati dal cambio stesso di variabile:

Cambio di variabile

$$\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x)\,dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t)\,dt = F(t)\bigg|_{g(a)}^{g(b)} = F(g(b)) - F(g(a)) \tag{2.33}$$

Esempio $h(x) = 2x\, e^{x^2},\ x \in [1, 5]$**:**

$$\int_1^5 2x\, e^{x^2}\, dx \tag{2.34}$$

Effettuando la sostituzione $t \to g(x) = x^2$ e $dt = 2x\, dx$, allora:

- $x = 1 \to t = 1^2 = 1$ (che corrisponde a calcolare $g(1)$)
- $x = 5 \to t = 5^2 = 25$ (che corrisponde a calcolare $g(5)$)

Allora:

$$\begin{aligned}\int_1^5 2x\, e^{x^2}\, dx &= \int_1^5 e^{x^2} 2x\, dx = \\ &= \int_1^5 e^{x^2}\, d(x^2) = \\ &= \int_1^{25} e^t\, dt = e^t\Big|_1^{25} = e^{25} - e^1\end{aligned} \tag{2.35}$$

Capitolo 3

Tabella riepilogativa

Funzione $f(x)$	Derivata $f'(x)$	Integrale $F(x)$
Costante $f(x) = a$	0	$ax + c$
Reciproca $f(x) = 1/x$	$-\frac{1}{x^2}$	$\ln \lvert x \rvert + c$
Lineare $f(x) = x$	1	$\frac{x^2}{2} + c$
Quadratica $f(x) = x^2$	$2x$	$\frac{x^3}{3} + c$
Radice quadrata $f(x) = \sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\frac{2}{3}\sqrt{x^3} + c$
Potenza generica $f(x) = x^n$	$n\,x^{n-1}$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + c$
Esponenziale $f(x) = a^x$	$\ln a \cdot a^x$	$\frac{1}{\ln a} \cdot a^x + c$
Logaritmo $f(x) = \log_a x$	$\frac{1}{\ln a} \cdot \frac{1}{x}$	$\frac{x \cdot \ln x - x}{\ln a} + c$
Seno $f(x) = \sin x$	$\cos x$	$-\cos x + c$
Coseno $f(x) = \cos x$	$-\sin x$	$\sin x + c$

Tabella 3.1: Riepilogo delle principali derivate e integrali

Capitolo 4

Derivate e integrali in fisica

4.1 Cinematica

4.1.1 Velocità

Se $x(t)$ è la legge che descrive l'evoluzione della posizione x rispetto a un sistema di riferimento che un corpo assume al scorrere del tempo t, allora la sua velocità v è definita da:

Velocita' istantanea di un corpo:

$$v = \frac{d\,x(t)}{dt} \tag{4.1}$$

Nel caso bi- o tri-dimensionale, la posizione sarà descritta da un vettore $\vec{r}(t)$ e la velocità sarà similmente definita da:

Velocita' istantanea di un corpo:

$$\vec{v} = \frac{d\,\vec{r}(t)}{dt} \tag{4.2}$$

che corrisponde ad un set di tre equazioni:

$$\begin{cases} v_x = \dfrac{d\,x(t)}{dt} \\ \\ v_y = \dfrac{d\,y(t)}{dt} \\ \\ v_z = \dfrac{d\,z(t)}{dt} \end{cases} \tag{4.3}$$

Si può procedere anche nella direzione: supponiamo di avere un moto unidimensionale del quale conosciamo già la velocità $v(t)$ e ci si domanda quale sia la legge oraria.

Allora occorre integrare la velocità:

Posizione di un corpo:

$$x(t) = \int v(u)du + c \tag{4.4}$$

L'integrazione è sempre definita a meno di una costante di integrazione c: questa costante viene fissata di volta in volta richiedendo delle particolari condizioni imposte dal problema, come ad esempio dire che all'istante t_0, il corpo si trova nella posizione x_0.
Di conseguenza:

$$x(t_0) + c \equiv x_0 \Longrightarrow c = x_0 - x(t_0) \tag{4.5}$$

Quindi c è definito dalla differenza tra x_0 (che generalmente è un valore dato) e $x(t_0)$ che è il valore che la funzione $x(t)$ assume all'istante di tempo t_0.

$$x(t) = \int v(u)du + x_0 - x(t_0) \tag{4.6}$$

La condizione su c può anche essere imposta da altri vincoli e perciò quest'ultimo esempio non deve esser considerato come "regola" sempre valida.
Lo spazio che invece percorre il corpo tra due istanti di tempo successivi t_1 e t_2 sarà definito da $x(t_2) - x(t_1)$ e poiché $x(t)$ è una primitiva di $v(t)$, allora ricordando la definizione data nell'Eq. 2.27 si ha:

Spazio percorso da un corpo:

$$\Delta x = x(t_2) - x(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} v(u)du \tag{4.7}$$

In modo analogo esisterà una generalizzazione al caso bi- e tri-dimensionale:

Posizione di un corpo:

$$\vec{r}(t) = \int \vec{v}(u)du + \vec{c} \tag{4.8}$$

dove la quantità $\vec{c}$ indica che si stanno considerando una costante che ha tre componenti c_x, c_y e c_z, una per ogni dimensione del moto:

- $$x(t) = \int v_x(u)du + c_x \tag{4.9}$$
- $$y(t) = \int v_y(u)du + c_y \tag{4.10}$$

- $$z(t) = \int v_z(u)du + c_z \tag{4.11}$$

In modo del tutto analogo lo spazio totale percorso da un corpo in movimento nel caso bi e tri-dimensionale

Spazio percorso da un corpo:

$$\Delta\vec{r} = \vec{r}(t_2) - \vec{r}(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \vec{v}(u)du \tag{4.12}$$

che corrisponderà a tre equazioni distinte:

- $$\Delta x = x(t_2) - x(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} v_x(u)du \tag{4.13}$$

- $$\Delta y = y(t_2) - y(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} v_y(u)du \tag{4.14}$$

- $$\Delta z = z(t_2) - z(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} v_z(u)du \tag{4.15}$$

4.1.2 Accelerazione

Se ora $v(t)$ è la legge che descrive l'evoluzione della velocità v rispetto a un sistema di riferimento che un corpo assume al scorrere del tempo t, allora la sua accelerazione a è definita da:

Accelerazione istantanea di un corpo:

$$a = \frac{d\,v(t)}{dt} = \frac{d^2x(t)}{dt^2} \tag{4.16}$$

Nel caso bi- o tri-dimensionale, la velocità sarà descritta da un vettore $\vec{v}\,(t)$ e l'accelerazione sarà similmente definita da:

Accelerazione istantanea di un corpo:

$$\vec{a} = \frac{d\,\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} \tag{4.17}$$

che corrisponde ad un set di tre equazioni:

$$\begin{cases} a_x = \dfrac{d\,v_x(t)}{dt} \\ \\ a_y = \dfrac{d\,v_y(t)}{dt} \\ \\ a_z = \dfrac{d\,v_z(t)}{dt} \end{cases} \tag{4.18}$$

Anche in questo caso, si può procedere nella direzione: supponiamo di avere un moto unidimensionale, dove conosciamo già l'accelerazione $a(t)$ e ci si domanda quale sia la velocità del corpo.
Allora occorre integrare l'accelerazione:

Velocita' di un corpo:

$$v(t) = \int a(u)du + c \tag{4.19}$$

Anche in questo caso avremo la costante di integrazione c da fissare che dipenderanno dal tipo di problema. Spesso si fissa supponendo che al tempo t_0 la velocità $v(t_0)$ sia pari a v_0.
Di conseguenza:

$$v(t_0) + c \equiv v_0 \Longrightarrow c = v_0 - v(t_0) \tag{4.20}$$

Quindi c è definito dalla differenza tra v_0 (che generalmente è un valore dato) e $v(t_0)$ che è il valore che la funzione $v(t)$ assume all'istante di tempo t_0.

$$v(t) = \int a(u)du + v_0 - v(t_0) \tag{4.21}$$

In modo analogo esisterà una generalizzazione al caso bi- e tri-dimensionale:

Velocita' di un corpo:

$$\vec{v}(t) = \int \vec{a}(u)du + \vec{c} \tag{4.22}$$

dove la quantità $\vec{c}$ indica che si stanno considerando una costante che ha tre componenti c_x, c_y e c_z, una per ogni dimensione del moto:

- $$v_x(t) = \int a_x(u)du + c_x \tag{4.23}$$
- $$v_y(t) = \int a_y(u)du + c_y \tag{4.24}$$

- $$v_z(t) = \int a_z(u)du + c_z \tag{4.25}$$