Fisica 2

Simualzione Secondo Esonero

Esercizio 1

Una spira quadrata di lato $l = 20$ cm e resistenza totale $R = 10\ \Omega$ si muove a velocità costante v_o l'ungo l'asse x. La spira è composta da un materiale di densità lineare $\lambda = 1$ Kg/m. È presente un campo magnetico nullo per $x < x_0$ mentre per $x > x_0$ il campo magnetico vale $B_0 = 50$ T. Se la spira si muove dalla regione in cui il campo magnetico è nullo verso quella in cui è $B = B_0$ calcolare:

- La velocità iniziale v_0 che la spira deve avere per penetrare interamente nella regione in cui in cui $B \neq 0$.

Nel caso in cui la velocità iniziale sia $v_0 = v^* = 3$ m/s determinare:

- La velocità della spira 120 s dopo che essa è penetrata completamente nella regione in cui $B \neq 0$.
- L'energia dissipata per effetto Joule dalla resistenza R nel processo.

Esercizio 2

Un solenoide infinito ha raggio $R = 15$ cm ed un numero di spire per unità di lunghezza $n = 1200$ spire/m.

- Trovare la corrente necessaria a generare nel solenoide un campo magnetico $B_S = 0.12$ T.
- Trovare il valore assoluto della velocità con cui si muove un elettrone che compie un orbita circolare di raggio $r = 3$ cm complanare ad una delle spire del solenoide sapendo che $m_e = 9.109 \cdot 10^{-31}$ Kg e $|q_e| = 1.602 \cdot 10^{-19}$ C.

All'interno del solenoide viene disposta una spira quadrata di lato $l = 5$ cm e resistenza $R = 12\ \Omega$ inizialmente disposta su un piano ortogonale all'asse del solenoide. La spira viene fatta ruotare con velocità angolare $\omega = 600$ rad/s attorno ad un asse ortogonale all'asse del solenoide. Calcolare:

- La f.e.m. indotta nella spira ed il suo valore massimo.
- La potenza istantanea dissipata nella spira ed il suo valore medio in un periodo.

Soluzioni

Soluzione Esercizio 1

Indichiamo con $x(t)$ la coordinata della parte anteriore della spira quadrata e poniamo $t = 0$ nel istante in cui la spira inizia a penetrare nella zona in cui è presente il campo $\vec{B}$.
Quando la spira inizia a penetrare nella regione in cui $\vec{B} \neq 0$ il flusso del campo magnetico nella spira aumenta in quanto la superficie esposta al campo $\vec{B}$ aumenta. La superficie esposta al campo magnetico al tempo t sarà:

$$S(t) = l\,(x(t) - x_0)\,.$$

Prendiamo la normale alla superficie $\hat{n}$ opposta a $\vec{B}$ e quindi il flusso $\Phi(t)$ sarà:

$$\Phi(t) = \vec{B} \cdot \hat{n} S(t) = B_0 l\,(x(t) - x_0) = lB_0 x_0 - lB_0 x(t).$$

La variazione del flusso genera una differenza di potenziale

$$\Delta V(t) = -\frac{\mathrm{d}\Phi(t)}{\mathrm{d}t} = lB_0 \dot{x}(t),$$

che a sua volta genera una corrente

$$i(t) = \frac{\Delta V(t)}{R} = \frac{lB_0}{R}\dot{x}(t).$$

La presenza di una corrente in un capo magnetico genera una forza di Lorentz

$$F_L = -li(t)B_0 = -\frac{(lB_0)^2}{R}\dot{x}(t)$$

Da cui

$$a(t) = \ddot{x}(t) = \frac{F_L}{m} = -\frac{(lB_0)^2}{mR}\dot{x}(t)$$

Dove $m = 4l\lambda = 0.8$ Kg è la massa della spira.
Abbiamo quindi un equazione differenziale del secondo ordine che può essere ricondotta ad un equazione differenziale del primo ordine ponendo $\dot{x}(t) = v(t)$.

$$\dot{v}(t) + \gamma v(t) = 0,$$

dove $\gamma = \frac{l^2 B_0^2}{mR}$. Usando come condizione di Cauchy $v(0) = v_0$ otteniamo l'espressione della velocità in funzione del tempo

$$v(t) = v_0 e^{-\gamma t}.$$

Integrando $v(t)$ con la condizione $x(0) = x_0$ troviamo l'espressione della posizione della parte frontale della spira in funzione del tempo

$$x(t) = \int_0^t v(\tau)\mathrm{d}\tau = x_0 + \frac{v_0}{\gamma}(1 - e^{-\gamma t}).$$

Quando al spira penetra interamente nella regione in cui è presente B la parte anteriore si troverà in $x_0 + l$ da cui

$$x(t_P) = x_0 + \frac{v_0}{\gamma}(1 - e^{-\gamma t_P}) = x_0 + l$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{v_0}{\gamma}(1 - e^{-\gamma t_P}) = l \quad \Rightarrow \quad t_P = -\frac{1}{\gamma}\ln\left(\frac{v_0 - \gamma l}{v_0}\right)$$

Le condizioni di esistenza di questa equazione ci dicono che

$$v_0 \geq \gamma l = \frac{l^3 B_0^2}{mR} = 2.5 \text{ m/s}$$

in particolare se $v_0 = \gamma l$ la spira impiega un tempo infinito ad entrare nella regione in cui $B \neq 0$. Essendo sia γ che l quantità positive l'argomento del logaritmo è sicuramente minore di 1 e quindi il tempo t_P è (quando definito) sempre positivo. Quindi affinché la spira penetri nella regione in cui è presente B deve avere una velocità iniziale $v_0 \leq \gamma l$.
Una volta che la spira e completamente entrata nella regione in cui $B \neq 0$ il flusso del campo è costante e quindi

$$\Delta V(t) = -\frac{\mathrm{d}\Phi(t)}{\mathrm{d}t} = 0$$

quindi non circola corrente e di conseguenza la spira non è soggetta a nessuna di forza e la sua velocità rimane inalterata. È quindi necessario solo calcolare la velocità spira appena è completamente entrata nella regione in cui è presente il campo magnetico.

$$v(t_P) = v_P = v^* e^{-\gamma t_P} = v^* exp\left(-\gamma\left(-\frac{1}{\gamma}\ln\left(\frac{v^* - \gamma l}{v^*}\right)\right)\right) = v^* - \gamma l = 0.5 \text{ m/s}.$$

Possiamo quindi osservare che nel caso limite di $v^* = \gamma l$ non solo la spira impiega un tempo infinito ad entrare ma una volta entrata a velocità nulla. La velocità 120 secondi dopo che la spira è penetrata interamente nel campo magnetico sarò quindi

$$v' = v_P = v_0 - \gamma l = 0.5 \text{ m/s}.$$

L'energia dissipata dalla resistenza può essere calcolata in due modi. Il primo è integrare nel tempo la potenza $P(t) = i^2(t)R$

$$\Delta E = \int_0^{t_P} i^2(\tau) R \mathrm{d}\tau = \int_0^{t_P} \frac{l^2 B_0^2}{R} v^2(\tau)\mathrm{d}\tau = \int_0^{t_P} \frac{l^2 B_0^2}{R} v_0^2 e^{-2\gamma\tau}\mathrm{d}\tau =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{l^2 B_0^2}{R\gamma} v_0^2 \left[1 - e^{-2\gamma t_P}\right] = \frac{1}{2} m v_0^2 \left[1 - \left(\frac{v_0 - \gamma l}{v_0}\right)^2\right] =$$

$$= \frac{1}{2} m \left(v_0^2 - (v_0 - \gamma l)^2\right) = \frac{1}{2} m \left(v_0^2 - v_P^2\right) = 3.5 \text{ J}$$

Il secondo metodo è utilizzare direttamente la differenza tra l'energia cinetica iniziale e finale ottenendo lo stesso risultato.

NOTA

L'esercizio poteva essere risolto anche in un altro modo. Partendo dal equazione

$$\ddot{x}(t) = -\frac{(lB_0)^2}{mR}\dot{x}(t),$$

può essere riscritta come:

$$\frac{\mathrm{d}v(t)}{\mathrm{d}t} = -\gamma\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}.$$

Dove γ è sempre $\gamma = \frac{l^2 B_0^2}{mR}$. Moltiplicando a desta e sinistra per dt si ottiene

$$\mathrm{d}v = -\gamma \mathrm{d}x$$

Integrando a sinistra tra $v(0)$ e $v(x)$ e a destra tra 0 e x otteniamo

$$v(x) - v_0 = -\gamma x \quad \Rightarrow \quad v(x) = v_0 - \gamma x$$

che ci dà direttamente la relazione tra la velocità e la posizione della spira. Se la spira deve entrare completamente nella reggione in cui è presente il campo magnetico deve avere $v(l) \geq 0$ il che implica

$$v_0 \geq \gamma l$$

Soluzione Esercizio 2

Per un solenoide infinito il campo magnetico è dato dalla legge:

$$B = \mu_0 i n$$

da cui possiamo ricavare la corrente necessaria generare il campo magnetico richiesto

$$i = \frac{B_S}{\mu_0 n} = 79.6 \text{ A}$$

La traiettoria circolare è data dalla forza di Lorentz

$$|\vec{F}_L| = q_e v B_S$$

che fornisce la forza centripeta che ha come espressione generale

$$|\vec{F}_C| = m_e \frac{v^2}{r}$$

uguagliando le due forze:

$$q_e v B_S = m_e \frac{v^2}{r} \Rightarrow q_e B_S = m_e \frac{v}{r}$$

$$\Downarrow$$

$$v = \frac{q_e}{m_e} B_S r = 6.33 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

Dato che la spira ruota l'angolo compreso fra la normale alla superficie ed il campo magnetico varia col tempo. Quindi il flusso di $\vec{B}$ nella spira sarà:

$$\Phi(t) = B_S l^2 \cos(\omega t)$$

da cui possiamo calcolare l'espressione della $f.e.m.$ in funzione del tempo:

$$f.e.m.(t) = -\frac{\mathrm{d}\Phi(t)}{\mathrm{d}t} = B_S l^2 \omega \sin(\omega t)$$

Il valore massimo della $f.e.m.$ sarà

$$|f.e.m.|_{MAX} = B_S l^2 \omega = 0.19 \text{ V}$$

La potenza istantanea vale

$$P(t) = \frac{(f.e.m.(t))^2}{R} = \frac{B_S^2 l^4 \omega^2 \sin^2(\omega t)}{R}$$

La potenza integrata media in un perdio è

$$\overline{P}(t) = \frac{1}{T}\int_0^T P(t) = \frac{B_S^2 l^4 \omega^2}{R}\int_0^T \frac{\sin^2(\omega t)}{T} = \frac{B_S^2 l^4 \omega^2}{2R} = 1.35 \cdot 10^{-3} \text{ W.}$$