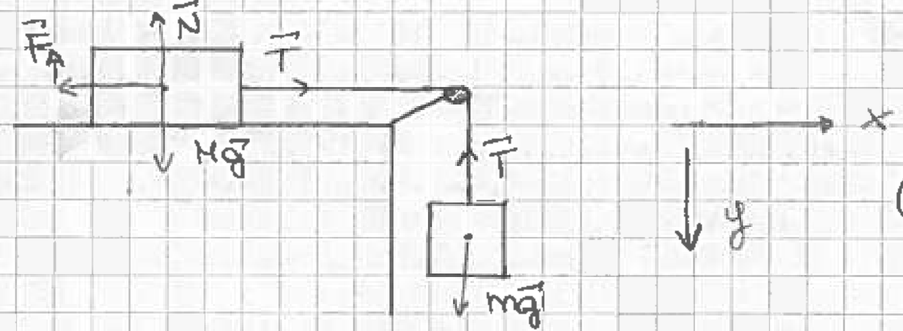
ESERCIZIO

Un blocco di metallo di massa $M = 2\,kg$ su un tavolo orizzontale è collegato ad una massa $m = 0.45\,kg$ da un filo di massa trascurabile che passa su una puleggia priva di attrito sul bordo del tavolo. Il blocco subisce una forza orizzontale quando si consente alla massa m di cadere. Il coefficiente d'attrito tra blocco e tavolo è 0.2. Calcolare:

1) l'accelerazione iniziale
2) la tensione del filo
3) la distanza che il blocco continuerebbe a percorrere se dopo 2 s il filo si rompesse

Consideriamo le forze in gioco:



(scelgo gli assi concordi al movimento che ipotizzo)

Le equazioni del moto saranno:

$$\begin{cases} T - F_A = Ma & (1) \\ Mg - N = 0 & (2) \end{cases}$$

Mentre per la massa m:

$$mg - T = ma \quad (3)$$

Notiamo che le accelerazioni delle due masse sono uguali poiché il filo è in tensione, e dunque la loro distanza reciproca rimane costante!

Dalla (2) ricavo:

$$N = Mg$$

e sostituendo nella (1):

$$T - \mu_D Mg = Ma$$

Dalla (3) ricavo:

$$T = mg - ma$$

Quindi posso sostituire nella (1):

$$mg - ma - \mu_D Mg = Ma$$

Da qui posso ricavare l'accelerazione.

Avrò infatti:

$$a = \frac{mg - \mu_D Mg}{m+M} = 0.2\,m/s^2$$

Ma allora la tensione del filo sarà:

$$T = m(g-a) = (0.45\,Kg)\left[(9.8-0.2)m/s^2\right] = 4.32\,N$$

Finché il filo rimane intatto, il blocco di massa M si muove di moto uniformemente accelerato con accelerazione a. Ma allora, dopo un tempo $\Delta t = 2s$ avrà raggiunto la velocità:

$$v_0 = a\Delta t = (0.2\,m/s^2)(2s) = 0.4\,m/s$$

A 2 s il filo si spezza, quindi M non risentirà della spinta di m e inizierà a frenare a causa dell'attrito. Il moto sarà uniformemente decelerato con decelerazione a_1. Il secondo principio della dinamica sarà:

$$-\mu_D Mg = Ma_1$$

Da cui:

$$a_1 = -\mu_D g = -1.96\,m/s^2$$

Il blocco si arresterà quando la sua velocità sarà nulla; indichiamo con $\tilde{t}$ il tempo in cui questo succede:

$$v(\tilde{t}) = 0$$

Avremo:

$$v(\tilde{t}) = v_0 - a_1\tilde{t} = 0$$

Da cui:

$$\tilde{t} = \frac{v_0}{a_1}$$

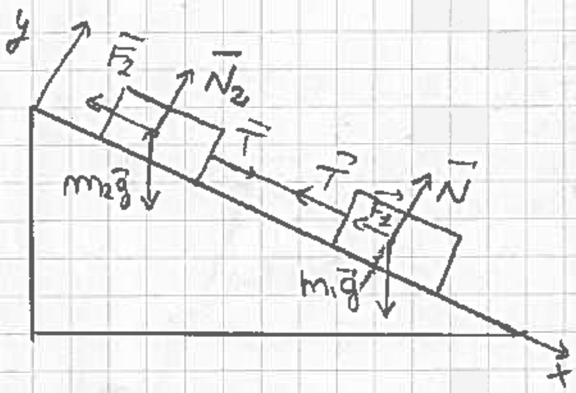
Lo spazio percorso fino all'istante $\tilde{t}$ sarà dato da:

$$s = v_0\tilde{t} - \frac{1}{2}a_1\tilde{t}^2 = \frac{v_0^2}{a_1} - \frac{1}{2}a_1\left(\frac{v_0}{a_1}\right)^2 =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{v_0^2}{a_1} = 0.04\,m$$

ESERCIZIO

Due corpi di massa $m_1 = 3\,kg$ e $m_2 = 1\,kg$ connessi da un filo, scivolano su un piano inclinato ($\theta = 30°$) con coefficienti di attrito $\mu_1 = 0.1$ e $\mu_2 = 0.2$. Il corpo m_1 precede il corpo m_2 e dopo un certo tempo il filo risulta teso. Calcolare l'accelerazione con cui il sistema scende quando il filo è teso e il valore della tensione del filo.



Scriviamo il secondo principio sugli assi scelti:

$$\begin{cases} m_1 g \operatorname{sen}\theta - \mu_1 N_1 - T = m_1 a \\ N_1 - m_1 g \cos\theta = 0 \end{cases}$$

Mentre per la massa 2:

$$\begin{cases} m_2 g \operatorname{sen}\theta + T - \mu_2 N_2 = m_2 a \\ N_2 - m_2 g \cos\theta = 0 \end{cases}$$

Sostituiamo N_1 ed N_2 nelle rispettive equazioni:

$$m_1 g \operatorname{sen}\theta - \mu_1 m_1 g \cos\theta - T = m_1 a \quad (1)$$

$$m_2 g \operatorname{sen}\theta + T - \mu_2 m_2 g \cos\theta = m_2 a \quad (2)$$

Come sempre l'accelerazione è la stessa quando il filo è teso. Dalla (1) ricaviamo T:

$$T = m_1 g \operatorname{sen}\theta - \mu_1 m_1 g \cos\theta - m_1 a$$

Sostituiamo nella (2):

$$m_2 g \operatorname{sen}\theta + m_1 g \operatorname{sen}\theta - \mu_1 m_1 g \cos\theta - m_1 a - \mu_2 m_2 g \cos\theta = m_2 a$$

Da cui:

$$(m_1 + m_2) a = (m_1 + m_2) g \operatorname{sen}\theta - g \cos\theta (\mu_1 m_1 + \mu_2 m_2)$$

E infine:

$$a = g \left[\operatorname{sen}\theta - \frac{\mu_1 m_1 + \mu_2 m_2}{m_1 + m_2} \cos\theta \right] = 3.77\,m/s^2$$

La tensione del filo sarà:

$$T = m_1 g \operatorname{sen}\theta - \mu_1 m_1 g\cos\theta - m_1 g \operatorname{sen}\theta + \frac{\mu_1 m_1^2}{m_1+m_2} g\cos\theta +$$

$$+ \frac{\mu_2 m_1 m_2}{m_1+m_2} g\cos\theta =$$

$$= \frac{-\mu_1 m_1 (m_1+m_2) g\cos\theta + \mu_1 m_1^2 g\cos\theta + \mu_2 m_1 m_2 g\cos\theta}{m_1+m_2} =$$

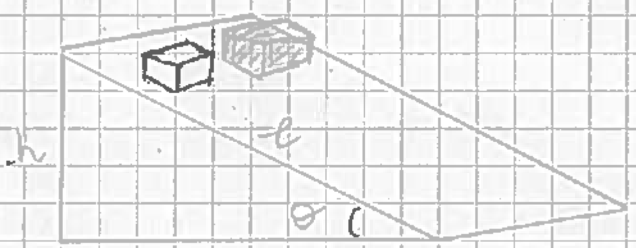
$$= \frac{-\mu_1 m_1^2 g\cos\theta - \mu_1 m_1 m_2 g\cos\theta + \mu_1 m_1^2 g\cos\theta + \mu_2 m_1 m_2 g c}{m_1+m_2}$$

Da cui, infine:

$$T = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2} g\cos\theta(\mu_2 - \mu_1)$$

Notiamo che il filo può rimanere teso solo se $\mu_2 > \mu_1$ cioè per $T > 0$. Se $\mu_2 < \mu_1$ il filo non è teso e m_2 raggiunge m_1 urtandolo.

Potrebbe sorprendere che il fatto che la corda sia tes dipenda solo dai coefficienti μ e non dalle masse, ma ricordiamo che, senza attrito, il tempo in cui il corpo scivola lungo tutta la lunghezza di un piano inclinato NON dipende dalla massa, infatti:



Le equazioni del moto sono:

$$\begin{cases} m_1 g \operatorname{sen}\theta = m_1 a_1 \\ m_2 g \operatorname{sen}\theta = m_2 a_2 \end{cases}$$

Da cui:

$$a_1 = a_2 = g \operatorname{sen}\theta$$

Dalle equazioni per il moto uniformemente accelerato abbiamo:

$$l = \frac{1}{2} g \operatorname{sen}\theta\, t^2$$

Da cui ricaviamo il tempo impiegato dalle masse per arrivare alla fine del piano inclinato:

$$t = \sqrt{\frac{2l}{g \operatorname{sen}\theta}} = \sqrt{\frac{2l^2}{g l \operatorname{sen}\theta}} = l\sqrt{\frac{2}{gh}}$$

non dipende da m così come la velocità finale:

$$v_f = at = g \operatorname{sen}\theta \sqrt{\frac{2l}{g \operatorname{sen}\theta}} = \sqrt{2 g \operatorname{sen}\theta\, l} = \sqrt{2gh}$$

Se invece aggiungo l'attrito (supponendo che entrambi i corpi scivolino) avrò:

$$m_1 g \,\text{sen}\theta - \mu_1 m_1 g \cos\theta = m_1 a_1$$

$$m_2 g \,\text{sen}\theta - \mu_2 m_2 g \cos\theta = m_2 a_2$$

Da cui:

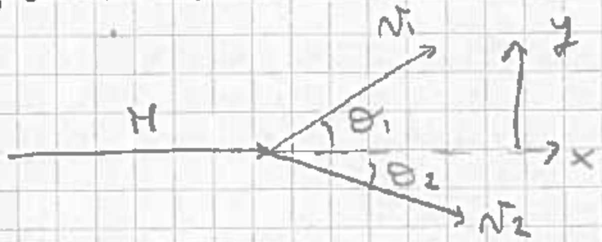
$$a_1 = g\left[\text{sen}\theta - \mu_1 \cos\theta\right]$$

$$a_2 = g\left[\text{sen}\theta - \mu_2 \cos\theta\right]$$

E quindi se $\mu_2 > \mu_1$ avrò $a_1 > a_2$.

ESERCIZIO

Un proiettile di massa $M = 12$ kg viaggia alla velocità $v = 270$ m/s. Improvvisamente esso si spezza in due frammenti di massa $m_1 = 7$ kg e $m_2 = 5$ kg. Determinare i moduli delle velocità dei due frammenti sapendo che il primo frammento viaggia con un angolo di 30° rispetto alla direzione originaria, mentre il secondo viaggia con un angolo di 25°.



$M = 12$ kg, $v = 270$ m/s

$m_1 = 7$ kg, $m_2 = 5$ kg

$\theta_1 = 30°$, $\theta_2 = 25°$

Non essendoci forze esterne, la quantità di moto si conserva in modo vettoriale, ovvero in tutte le dimensioni. Posso allora scrivere:

$$M v_x = m_1 v_{1x} + m_2 v_{2x} \quad (1)$$

$$M v_y = m_1 v_{1y} + m_2 v_{2y}$$

Nel nostro caso $v_y = 0$, quindi da quest'ultima abbiamo:

$$m_1 v_{1y} + m_2 v_{2y} = 0$$

$$m_1 v_1 \operatorname{sen}\theta_1 - m_2 v_2 \operatorname{sen}\theta_2 = 0$$

Da cui:

$$v_1 = \frac{m_2 \operatorname{sen}\theta_2}{m_1 \operatorname{sen}\theta_1} v_2$$

Consideriamo ora la (1):

$$M v = m_1 v_1 \cos\theta_1 + m_2 v_2 \cos\theta_2$$

Sostituendo v_1:

$$M v = \cancel{m_1} \frac{m_2 \operatorname{sen}\theta_2}{\cancel{m_1} \operatorname{sen}\theta_1} v_2 \cos\theta_1 + m_2 v_2 \cos\theta_2$$

$$M v = m_2 v_2 \left(\frac{\operatorname{sen}\theta_2}{\operatorname{sen}\theta_1} \cos\theta_1 + \cos\theta_2 \right)$$

Da cui:

$$v_2 = \frac{Mv}{m_2\left(\frac{\operatorname{sen}\theta_2}{\operatorname{sen}\theta_1}\cos\theta_1 + \cos\theta_2\right)} = 396\ m/s$$

E quindi:

$$v_1 = \frac{m_2 \operatorname{sen}\theta_2}{m_1 \operatorname{sen}\theta_1}\ \frac{Mv}{m_2}\left(\frac{1}{\frac{\operatorname{sen}\theta_2}{\operatorname{sen}\theta_1}\cos\theta_1 + \cos\theta_2}\right) =$$

$$= \frac{Mv}{m_1\left(\cos\theta_1 + \frac{\operatorname{sen}\theta_1}{\operatorname{sen}\theta_2}\cos\theta_2\right)} = 239\ m/s$$

ESERCIZIO

Un cubo di massa $m_1 = 1\ kg$ è poggiato sopra una lastra di massa $m_2 = 3\ kg$. Tra il cubo e un sostegno fissato ad un'estremità della lastra c'è una molla, totalmente compressa, di costante elastica $K = 50\ N/m$ e lunghezza a riposo $d = 0.1\ m$. Il sistema è inizialmente bloccato in queste condizioni.
Ad un certo istante lasciamo libero il sistema permettendo alla molla di espandersi. L'azione della molla cessa quando essa raggiunge la lunghezza di riposo d.
Calcolare la velocità dei due corpi e descrivere il moto del centro di massa fino a che il cubo non cade dalla lastra.

$m_1 = 1\ kg \qquad m_2 = 3\ kg$

$K = 50\ N/m \qquad d = 0.1\ m$

Poiché la forza peso è bilanciata dalla reazione vincolare, sul sistema non agiscono forze esterne, quindi la quantità di moto totale si conserva; inoltre, non essendoci attrito si conserverà anche l'energia meccanica.

Imponiamo allora la conservazione della quantità di moto. Il sistema era inizialmente in quiete, quindi la quantità di moto iniziale è nulla. Avremo:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = 0 \longrightarrow v_2 = -\frac{m_1}{m_2} v_1 \quad (1)$$

con v_1 e v_2 velocità finali (cioè quando la molla si espande)
Per la conservazione dell'energia meccanica avremo invece:

$$\underbrace{\frac{1}{2} K d^2}_{\text{energia iniziale}*} = \underbrace{\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2}_{\text{energia finale}}$$

* se la molla è totalmente compressa la sua variazione rispetto alla lunghezza a riposo è proprio d

Sostituendo la (1) abbiamo

$$\cancel{\frac{1}{2}} K d^2 = \cancel{\frac{1}{2}} m_1 v_1^2 + \cancel{\frac{1}{2}} \cancel{m_2} \frac{m_1^2}{m_2^{\cancel{2}}} v^2$$

$$m_2 K d^2 = m_1 m_2 v_1^2 + m_1^2 v_1^2$$

Da cui:

$$v_1 = \sqrt{\frac{m_2 K d^2}{m_1 m_2 + m_1^2}} = 0.612\ m/s$$

E allora:

$$v_2 = -\frac{m_1}{m_2} v_1 = -0.204\ m/s$$

Notiamo che per $m_2 \longrightarrow \infty$ avremo $v_2 \longrightarrow 0$ e $v_1^2 \longrightarrow \frac{Kd^2}{\ }$

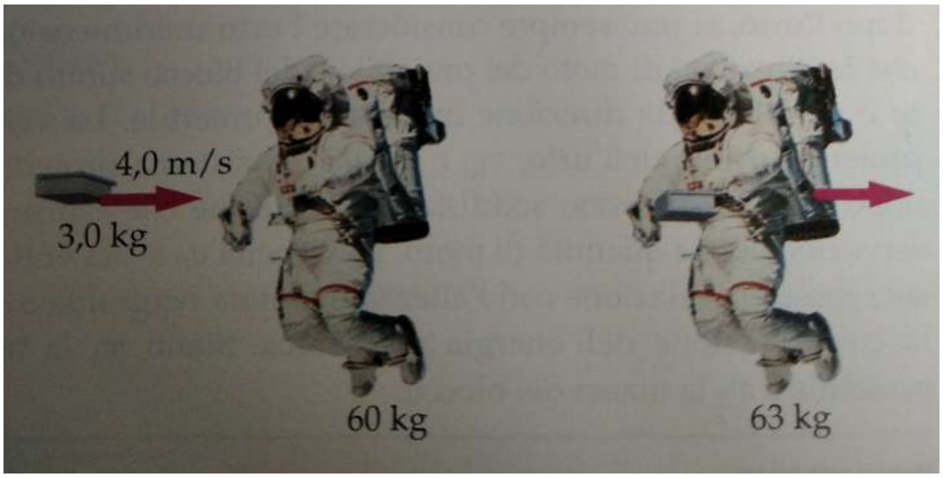
Questa v_1 è proprio la velocità che un corpo di massa m_1 acquista a seguito dell'espansione di una molla:

$$\frac{1}{2}kd^2 = \frac{1}{2}m_1 v_1^2 \rightarrow v_1^2 = \frac{kd^2}{m_1}$$

Infine, poiché la risultante delle forze esterne è nulla, il centro di massa, che era fermo nell'istante iniziale, continua a rimanere in quiete.

ESERCIZIO

Un astronauta di massa M=60 kg si trova nello spazio, in quiete rispetto ad una navicella spaziale. Dalla navicella gli viene lanciata una massa m=3 kg con velocità v=4 m/s rispetto alla navicella stessa. Determinare la velocità dell'astronauta dopo aver afferrato la massa, la differenza di energia cinetica del sistema, e l'impulso impresso dalla massa all'astronauta.



Si tratta di un urto anelastico. La conservazione della quantità di moto implica che:
mv = (m+M) vf

con vf velocità finale del sistema. Allora
vf = mv/(m+M) = 0.19 m/s

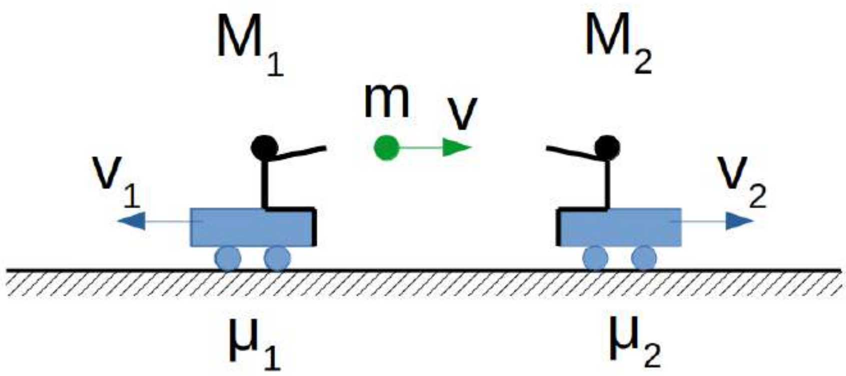
L'energia cinetica iniziale e quella finale sono:
Ek,in = 1/2 m v^2 = 24 J; Ek,fin = 1/2 (m+M) vf^2 = 1.14 J

L'impulso impresso all'astronauta è uguale alla variazione della sua quantità di moto:
I = p,fin − p,in = M (vf−0) = M vf = 11.4 N x s

che è uguale all'impulso impresso alla massa m, pari a: m (vf−v)

ESERCIZIO

Una persona su un carrello (massa totale $M_1=60$ kg) lancia una palla di massa $m=2$ kg, con velocità $v=9$ m/s, ad un'altra persona su un altro carrello (massa totale $M_2=50$ kg). Sapendo che i coefficienti di attrito sono $\mu_1=0.05$ e $\mu_2=0.07$, trovare il tratto di spazio percorso lungo il piano orizzontale dai due carrelli.



Per il sistema 1, la conservazione della quantità di moto implica che:

$mv = -M_1 v_1$ quindi: $v_1 = -mv/M_1$.

Per il sistema 2, si ha un urto anelastico:

$mv = (m+M_2)v_2$ quindi: $v_2 = mv/(m+M_2)$.

v1 e v2 sono le velocità iniziali con cui iniziano a muoversi i carrelli, che poi frenano a causa dell'attrito. Il lavoro fatto dall'attrito deve uguagliare la variazione di energia (cinetica):

$L_{att1} = F_{att1} \cdot l_1 = -\mu_1 M_1 g\, l_1$

$E_{k1,in} = 1/2\ M_1 v_1^2$

$E_{k1,fin} = 0$

Quindi:

$-\mu_1 M_1 g\, l_1 = -1/2\ M_1 v_1^2$

$l_1 = v_1^2 / (2 \mu_1 g)$

Lo stesso ragionamento si applica al sistema 2:

$L_{att2} = F_{att2} \cdot l_2 = -\mu_2 (m+M_2) g\, l_2$

$E_{k2,in} = 1/2\ (m+M_2) v_2^2$

$E_{k2,fin} = 0$

Quindi:

$-\mu_2 (m+M_2) g\, l_2 = -1/2\ (m+M_2) v_2^2$

$l_2 = v_2^2 / (2 \mu_2 g)$