

Esercizio 1

Una carica $q = 5 \times 10^{-11}$ C è distribuita in una sfera di raggio $R = 11$ cm con una densità $\rho(r) = A(R - r)$ dove A è una costante e r la distanza dal centro.

1. Calcolare il valore della costante A . **[3 punti]**
2. Determinare il campo elettrico in tutto lo spazio e calcolare il suo valore numerico sulla superficie della sfera. **[3 punti]**
3. Calcolare il potenziale sulla superficie della sfera (ponendo $V_\infty = 0$) e nel suo centro. **[3 punti]**
4. La sfera viene racchiusa in un guscio metallico, sferico e concentrico, di raggio $2R$ e spessore trascurabile, collegato a terra. Come cambia il campo elettrico nello spazio? **[2 punti]**

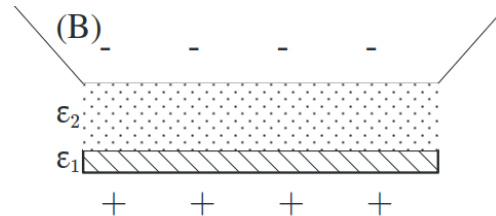
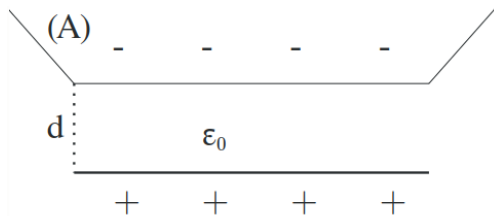
Esercizio 2

Una certa stella emette brevi impulsi di energia a intervalli regolari. Si assume che una zona della superficie stellare e l'atmosfera soprastante formino un condensatore piano (Fig. A), di area $A = \pi R_p^2$ e distanza tra le armature d , che si scarica attraverso una resistenza $\mathcal{R}$ (non disegnata). Il campo elettrico massimo tra le armature è pari a $E_0 = 5 \times 10^6$ V/m. Si assumono inoltre i seguenti valori numerici: $R_p = 500$ m, $d = 100$ m, $\mathcal{R} = 10^5 \Omega$.

1. Calcolare la capacità C del condensatore, la massima differenza di potenziale V_0 e la massima quantità di carica immagazzinata Q_0 . **[2 punti]**
2. Scrivere le espressioni di $V(t)$ e $I(t)$ durante la scarica. Calcolare la costante di tempo del circuito RC e la potenza massima dissipata. **[3 punti]**
3. Determinare in quanto tempo viene dissipato il 99% dell'energia immagazzinata. **[3 punti]**

Si ipotizza ora che lo spazio tra la superficie stellare e l'atmosfera sia costituito da due strati differenti (Fig. B): uno inferiore di spessore $d_1 = 10$ m e permittività relativa $\epsilon_1 = 10$, e uno strato superiore di spessore $d_2 = 90$ m e permittività relativa $\epsilon_2 = 1$. La carica totale rimane Q_0 come calcolato al punto 1.

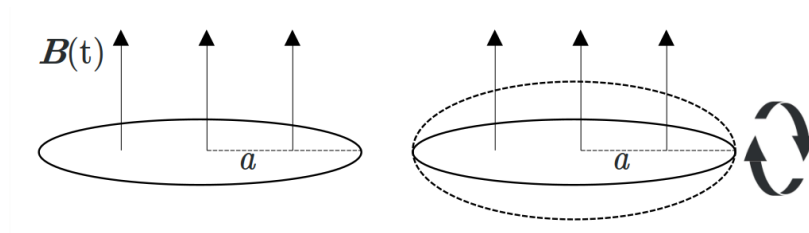
4. Calcolare la capacità equivalente e la nuova differenza di potenziale V'_0 tra le armature. **[3 punti]**
5. Dire in quale dei due strati si concentra la maggior parte dell'energia (non è necessario svolgere il calcolo esplicito). **[2 punti]**



Esercizio 3

Una regione circolare di raggio $a = 5$ cm contiene un campo magnetico uniforme $\mathbf{B}(t)$ diretto perpendicolarmente al piano e che varia nel tempo secondo: $B(t) = \beta t$, con ($\beta = 0.02$ T/s). Attorno a questa regione è posto un anello conduttore circolare, di raggio a e resistenza $\mathcal{R} = 2 \Omega$, concentrico con la regione magnetica.

1. Determinate la corrente indotta $I(t)$ nell'anello e discutere il suo verso tramite la legge di Lenz. Calcolare la potenza istantanea dissipata per effetto Joule nell'anello. [4 punti]
2. Assumendo ora che l'anello ruoti con velocità angolare costante ω attorno a un asse orizzontale, scrivere la nuova espressione della corrente indotta $I'(t)$. [5 punti]



Soluzione del primo esercizio:

1. La carica totale è pari all'integrale di volume

$$q = \int \rho dv = \int_0^R A(R-r)4\pi r^2 dr = \frac{\pi AR^4}{3} \quad (1)$$

da cui

$$A = \frac{3q}{\pi R^4} = 3.26 \times 10^{-7} \text{ C/m}^4 \quad (2)$$

2. Data la simmetria sferica, il campo elettrico è radiale e si può calcolare applicando il teorema di Gauss ad una superficie sferica. Iniziamo con il campo all'interno della sfera, a distanza $r < R$ dal centro.

$$\Phi(\vec{E}) = E 4\pi r^2 = \frac{q_{int}}{\varepsilon_0} = \frac{1}{\varepsilon_0} \int_0^r A(R-r')4\pi r'^2 dr' \quad (3)$$

risolvendo l'integrale si ottiene

$$E 4\pi r^2 = \frac{1}{\varepsilon_0} \left(A4\pi R \frac{r^3}{3} - A4\pi \frac{r^4}{4} \right) \quad (4)$$

e infine

$$E(r \leq R) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^4} (4Rr - 3r^2) \quad (5)$$

All'esterno della sfera, sempre applicando il teorema di Gauss per una superficie di raggio $r > R$:

$$E(r > R) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \quad (6)$$

sulla superficie della sfera si ricava quindi

$$E(r = R) = 37.1 \text{ V/m} \quad (7)$$

3. Il potenziale si calcola dall'integrale del campo elettrico:

$$V_R - V_\infty = - \int_\infty^R \vec{E} \cdot d\vec{r} = - \int_\infty^R \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr \quad (8)$$

si ricava pertanto

$$V_R = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R} = 4.1 \text{ V} \quad (9)$$

Invece per il potenziale al centro della sfera si può scrivere:

$$V_0 - V_R = - \int_R^0 \vec{E} \cdot d\vec{r} = - \int_R^0 \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^4} (4Rr - 3r^2) dr = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \left[\frac{2r^2}{R^3} - \frac{r^3}{R^4} \right]_R^0 = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R} \quad (10)$$

Allora inserendo la 9 si ricava:

$$V_0 = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 R^2} = 8.2 \text{ V} \quad (11)$$

4. Sulla superficie interna del guscio metallico viene indotta una carica $-q$; la carica $+q$ sulla superficie esterna viene dispersa a terra. Il campo elettrico fino a $r < 2R$ rimane lo stesso, poi si annulla per il teorema di Gauss ($q_{int} = 0$).

Soluzione del secondo esercizio:

1. La capacità del condensatore piano è:

$$C = \varepsilon_0 \frac{A}{d} = \varepsilon_0 \frac{\pi R_p^2}{d} = 6.94 \times 10^{-8} \text{ F} \quad (12)$$

Il potenziale massimo vale:

$$V_0 = E_0 d = 5 \times 10^8 \text{ V} \quad (13)$$

La carica massima immagazzinata è:

$$Q_0 = CV_0 = 34.7 \text{ C} \quad (14)$$

2. Le leggi temporali di scarica sono le seguenti:

$$V(t) = V_0 e^{-t/\tau} \quad (15)$$

$$I(t) = \frac{V_0}{R} e^{-t/\tau} \quad (16)$$

con $\tau = RC = 6.9 \times 10^{-3} \text{ s}$.

La corrente iniziale e la potenza massima risultano:

$$I_0 = \frac{V_0}{R} = 5 \times 10^3 \text{ A} \quad (17)$$

$$P_{\max} = V_0 I_0 = 2.5 \times 10^{12} \text{ W} \quad (18)$$

3. L'energia dissipata è in generale

$$U(t) = \frac{1}{2} CV^2 = \frac{1}{2} CV_0^2 e^{-2t/\tau} = U_0 e^{-2t/\tau} \quad (19)$$

Il 99% dell'energia è dissipato quando $U(t) = 0.01 U_0$, cioè:

$$e^{-2t/\tau} = 0.01 \Rightarrow t = \frac{\tau}{2} \ln(100) = 2.3\tau = 15.9 \text{ ms}. \quad (20)$$

4. La capacità dei due strati vale:

$$C_1 = \varepsilon_0 \varepsilon_1 \frac{A}{d_1} = 6.95 \times 10^{-6} \text{ F}, \quad (21)$$

$$C_2 = \varepsilon_0 \varepsilon_2 \frac{A}{d_2} = 7.72 \times 10^{-8} \text{ F}. \quad (22)$$

La capacità equivalente (serie) vale:

$$\frac{1}{C_{\text{eq}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} \Rightarrow C_{\text{eq}} = 7.64 \times 10^{-8} \text{ F}. \quad (23)$$

La nuova differenza di potenziale risulta quindi:

$$V'_0 = \frac{Q_0}{C_{\text{eq}}} = 4.54 \times 10^8 \text{ V}. \quad (24)$$

5. Le energie immagazzinate nei singoli strati sono:

$$U_1 = \frac{Q_0^2}{2C_1}, \quad U_2 = \frac{Q_0^2}{2C_2} \quad (25)$$

ed essendo $C_1 > C_2$ si ha $U_2 > U_1$.

Soluzione del terzo esercizio:

1. Il flusso magnetico attraverso la superficie circolare è

$$\Phi(t) = \pi a^2 B(t) \quad (26)$$

Applicando la legge di Faraday:

$$\mathcal{E} = -\frac{d\Phi}{dt} = -\pi a^2 \beta \quad (27)$$

La corrente indotta è quindi

$$I = \frac{\mathcal{E}}{\mathcal{R}} = -\frac{\pi a^2 \beta}{\mathcal{R}} = -7.85 \times 10^{-5} \text{ A}. \quad (28)$$

Il segno negativo indica che il verso della corrente è orario in riferimento al disegno. In effetti, per la legge di Lenz, la corrente indotta deve generare un campo magnetico opposto a $\mathbf{B}(t)$ in modo da opporsi all'aumento di flusso.

La potenza dissipata nell'anello è

$$P(t) = I^2 \mathcal{R} = 1.23 \times 10^{-8} \text{ W}. \quad (29)$$

2. Assumiamo che all'istante $t = 0$ l'anello sia perpendicolare al campo. Per la rotazione, l'angolo tra la normale dell'anello e il campo varia in funzione del tempo secondo $\theta(t) = \omega t$. La componente del campo normale alla superficie racchiusa dall'anello è $B(t) \cos \theta(t)$. Quindi il flusso magnetico è

$$\Phi_B(t) = \pi a^2 B(t) \cos(\omega t) = \pi a^2 \beta t \cos(\omega t). \quad (30)$$

La f.e.m. indotta è

$$\begin{aligned} \mathcal{E}(t) &= -\frac{d\Phi_B}{dt} = -A \frac{d}{dt} (\beta t \cos(\omega t)) \\ &= -A (\beta \cos(\omega t) - \beta t \omega \sin(\omega t)). \end{aligned} \quad (31)$$

Quindi la corrente indotta nell'anello è

$$I(t) = \frac{\mathcal{E}(t)}{\mathcal{R}} = -\frac{A}{\mathcal{R}} (\beta \cos(\omega t) - \beta t \omega \sin(\omega t)). \quad (32)$$