ESERCIZIO 1

Un corpo di massa 3 kg scivola su una guida priva di attrito come in figura, terminando su un tratto orizzontale. Su quest'ultimo è posta una molla di lunghezza a riposo 1 m e $K = 20$ N/m. Una volta che il corpo tocca la molla vi rimane attaccato iniziando ad oscillare. Si calcoli:

1) La velocità del corpo nel momento in cui tocca la molla
2) ω, ampiezza e periodo delle oscillazioni
3) Si scriva l'equazione della traiettoria del corpo in un sistema di riferimento a piacere, assumendo che il contatto tra la molla e la massa avvenga all'istante $t=0$

$m = 3$ kg $\quad K = 20$ N/m

$R = 30$ cm , $\ell = 1$ m

Per ricavare la velocità del corpo nel momento in cui tocca la molla posso applicare la conservazione dell'energia meccanica (non c'è attrito):

$$\underbrace{mgR}_{\text{energia iniziale}} = \underbrace{\frac{1}{2} m v_0^2}_{\text{energia finale}}$$

Da qui ricavo:

$$v_0 = \sqrt{2gR} = 2.42 \text{ m/s}$$

Quando il corpo tocca la molla vi rimane attaccato, cioè sarà VINCOLATO e inizierà ad oscillare. Le equazioni che esprimono la variazione di posizione, velocità e accelerazione in funzione del tempo saranno:

$$x(t) = A \operatorname{sen}(\omega t + \phi)$$

$$v(t) = \omega A \cos(\omega t + \phi)$$

$$a(t) = -\omega^2 A \operatorname{sen}(\omega t + \phi)$$

Quest'ultima la posso riscrivere come:

$$a = -\omega^2 x$$

Ma dal secondo principio della dinamica ricavo:

$$F = ma \longrightarrow a = \frac{F}{m}$$

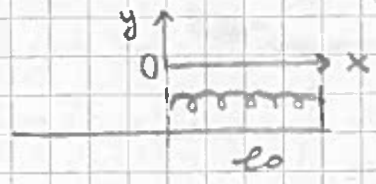
dove F qui è la forza elastica: $F = -Kx$. Ma allora,

$$-\frac{Kx}{m} = -\omega^2 x \longrightarrow \omega = \sqrt{\frac{K}{m}} = 2.58 \text{ rad/s}$$

Da qui ricaviamo subito:

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=2.43\ s$$

L'ampiezza A e la fase ϕ sono legate alle condizioni iniziali del sistema. Scegliamo un sistema di riferimento comodo:



L'origine è nella lunghezza a riposo della molla

Dalle equazioni del moto $x(t)$ e $v(t)$ scritte prima abbiamo:

$$x(t=0)=A\,sen\,\phi = x_0 \qquad ①$$

$$v(t=0)=\omega A\cos\phi = v_0 \qquad ②$$

nel nostro caso $x_0=0$ (essendo la molla a riposo nel momento in cui il corpo vi si attacca) e $v_0=\sqrt{2gR}$ come ricavato prima. Ma allora:

$$A=\sqrt{x_0^2+\frac{v_0^2}{\omega^2}}=\sqrt{\frac{v_0^2}{\omega^2}}=\sqrt{\frac{2gRm}{K}}=0.94\ m$$

Potevamo arrivare allo stesso risultato attraverso la conservazione dell'energia: la massima ampiezza corrisponde, nel riferimento scelto, alla massima compressione della molla, che si ha quando il corpo si ferma per un istante. Avrò allora:

$$\underbrace{\frac{1}{2}mv_0^2}_{\substack{\text{energia}\\ \text{iniziale}\\ \text{(solo cinetica)}}}=\underbrace{\frac{1}{2}KA^2}_{\substack{\text{energia finale}\\ \text{(solo potenziale}\\ \text{elastica)}}}$$

Da questa ricaviamo:

$$A=\sqrt{\frac{mv_0^2}{K}}=\sqrt{\frac{m}{K}}\,v_0=\sqrt{\frac{2gRm}{K}}$$

Dalle ① e ② possiamo ricavare anche la fase iniziale:

$$\frac{x_0}{v_0}=\frac{sen\,\phi}{\omega\cos\phi}\longrightarrow\frac{x_0}{\omega v_0}=tg\,\phi$$

Ma qui $x_0=0$, quindi:

$$tg\,\phi=0\longrightarrow\phi=0$$

La traiettoria sarà:

$$x(t)=A\,sen\,\omega t$$

ovvero:

$$x(t)=[0.94\ m]\ sen\,[(2.58\ rad/s)\,t]$$

ESERCIZIO 2

Un punto materiale di massa $m = 1$ kg viaggia su un piano orizzontale scabro con $\mu = 0.5$. Ad un certo istante esso passa per il punto A con velocità v_A. Dopo aver percorso un tratto di lunghezza $d = 3$ m incontra una molla con $K = 10$ N/m inizialmente a riposo. Trovare:

- il minimo valore di v_A tale che il corpo arrivi a toccare la molla

Nel caso in cui $v_A = 6.5$ m/s, trovare:

- la velocità nel punto di impatto della molla e il tempo t necessario per raggiungerla
- la massima compressione della molla

Per ricavare il valore di v_A tale per cui il punto arriva alla molla devo confrontare l'energia cinetica corrispondente a v_A con il lavoro che compie la forza d'attrito che tende a fermarlo:

$$\frac{1}{2} m v_A^2 = \mu m g d \rightarrow v_A = \sqrt{2 \mu g d} = 5.4\ m/s$$

Qui ho ricavato il valore minimo di v_A, cioè quello per cui il punto arriva alla molla a velocità nulla. Se invece voglio che il punto arrivi alla molla con velocità non nulla (che indichiamo con v_B), avrò:

$$\frac{1}{2} m v_A^2 = \frac{1}{2} m v_B^2 + \mu m g d$$

dove v_A è ora uguale a 6.5 m/s. Avrò allora:

$$v_B = \sqrt{v_A^2 - 2 \mu g d} = 3.6\ m/s$$

Il moto del punto nel tratto d è determinato dalla sola forza di attrito; il secondo principio è infatti:

$$-\mu m g = m a$$

Da cui ricavo:

$$a = -\mu g \quad \text{— moto uniformemente decelerato}$$

Per ricavare l'istante in cui avviene l'impatto, che chiamo t_B, posso allora applicare le equazioni del moto uniformemente accelerato:

$$v(t) = v_0 + at$$

che in questo caso diventa:

$$v_B = v_A - \mu g t_B \longrightarrow t_B = \frac{v_A - v_B}{\mu g} = 0.6\ s$$

Quando la molla è totalmente compressa il punto si ferma. Il bilancio energetico sarà:

$$\frac{1}{2} m v_B^2 = \frac{1}{2} K \Delta x^2 + \mu m g \Delta x$$

Da cui ricavo, come soluzione positiva:

$$\Delta x = \frac{1}{K} \left[\sqrt{(\mu m g)^2 + K m v_B^2} - \mu m g \right] = 0.75\ m$$

questa è la compressione della molla.

ESERCIZIO 3

Due punti materiali di massa m_1 e m_2 si muovono lungo una retta con velocità v_1 e v_2. Ad un certo istante si urtano elasticamente. Calcolare le velocità v_1' e v_2' dopo l'urto e studiare in particolare il caso $m_1 = m_2$ e $v_2 = 0$.

Affinché avvenga l'urto deve essere $v_1 > v_2$. Essendo poi l'urto elastico vale sia la conservazione dell'energia che la conservazione della quantità di moto:

$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2'$$

$$\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2$$

(i corpi, infatti, hanno solo energia cinetica). Dalla prima equazione ricaviamo:

$$v_1' = v_1 + \frac{m_2}{m_1}(v_2 - v_2') \quad (*)$$

E dalla seconda:

$$v_1'^2 = v_1^2 + \frac{m_2}{m_1}(v_2^2 - v_2'^2)$$

Sostituiamo la $(*)$ e otteniamo:

$$\cancel{v_1^2} + 2\frac{m_2}{m_1} v_1 (v_2 - v_2') + \frac{m_2^2}{m_1^2}(v_2 - v_2')^2 = \cancel{v_1^2} + \frac{m_2}{m_1}(v_2^2 - v_2'^2)$$

$$2\frac{m_2}{m_1} v_1 (v_2 - v_2') + \frac{m_2^2}{m_1^2}(v_2 - v_2')^2 = \frac{m_2}{m_1}(v_2 - v_2')(v_2 + v_2')$$

Divido per m_2/m_1 e ottengo:

$$\frac{m_2}{m_1}(v_2 - v_2')^2 + 2v_1(v_2 - v_2') - (v_2 + v_2')(v_2 - v_2') = 0$$

Mettendo in evidenza $(v_2 - v_2')$ ottengo:

$$(v_2 - v_2')\left[\frac{m_2}{m_1}(v_2 - v_2') + 2v_1 - (v_2 + v_2')\right] = 0$$

Avrò dunque due soluzioni. La prima è banale:

$$v_2 = v_2'$$

Mentre la seconda deriva da:

$$v_2'\left(1 + \frac{m_2}{m_1}\right) = v_2\left(\frac{m_2}{m_1} - 1\right) + 2v_1$$

Da cui

$$v_2' = \frac{\frac{v_2(m_2-m_1)+2m_1v_1}{m_1}}{\frac{m_1+m_2}{m_1}}$$

E infine:

$$v_2' = \frac{2m_1}{m_1+m_2}v_1 + \frac{m_2-m_1}{m_1+m_2}v_2$$

Per trovare v_1' sostituiamo nella (A):

$$v_1' = v_1 + \frac{m_2}{m_1}\left(v_2 - \frac{2m_1v_1}{m_1+m_2} - \frac{m_2-m_1}{m_1+m_2}v_2\right)$$

Da cui ricaviamo:

$$v_1' = v_1 + \frac{m_2}{m_1}\left[\frac{(m_1+m_2)v_2 - 2m_1v_1 - (m_2-m_1)v_2}{m_1+m_2}\right]$$

$$v_1' = v_1 + \frac{m_2}{m_1}\left[\frac{2m_1(v_2-v_1)}{m_1+m_2}\right] = \frac{(m_1+m_2)v_1 + 2m_2(v_2-v_1)}{m_1+m_2}$$

che posso infine riscrivere come:

$$v_1' = \frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}v_1 + \frac{2m_2}{m_1+m_2}v_2$$

Ora che abbiamo le due velocità v_1' e v_2' possiamo studiare i casi particolari.

Caso 1

Se $m_1 = m_2$ avremo:

$$v_1' = v_2 \qquad v_2' = v_1$$

cioè i due corpi si scambiano la velocità.

Caso 2

Se $v_2 = 0$, cioè il secondo corpo è inizialmente fermo, avremo:

$$v_1' = \frac{m_1-m_2}{m_1+m_2}v_1 \quad , \quad v_2' = \frac{2m_1}{m_1+m_2}v_1$$

Se $m_1 > m_2$ entrambi i corpi si muoveranno nel verso di v_1, mentre se $m_2 > m_1$ la massa m_1 tornerà indietro mentre m_2 andrà avanti.

Infine, notiamo che:

se $m_1 \ll m_2$ allora $v_1' \simeq -v_1$ e $v_2' \simeq 0$, cioè in pratica il primo corpo rimbalza con la stessa velocità e il secondo non si muove (come se fosse un muro)

ESERCIZIO

Un profilo privo di attrito è costituito da un primo tratto orizzontale e da un secondo tratto in salita con un'inclinazione di $\theta = 30°$. Alla base del tratto in salita vi è un corpo di massa $M = 7\ kg$, inizialmente fermo, che viene colpito da un corpo di massa $m = 3\ kg$ che viaggia sul tratto orizzontale con velocità $v = 1.5\ m/s$. Determinare la lunghezza totale del tratto percorso in salita dal corpo M se l'urto è elastico.

$\theta = 30°$ $M = 7\ kg$

$m = 3\ kg$ $v = 1.5\ m/s$

Poiché l'urto è elastico si conservano sia l'energia che la quantità di moto. Indichiamo con v_1 e v_2 le velocità iniziale e finale di m e con V quella di M. Avremo:

$$m v_1 = m v_2 + MV$$

$$\frac{1}{2} m v_1^2 = \frac{1}{2} m v_2^2 + \frac{1}{2} M V^2$$

Posso allora scrivere:

$$\begin{cases} m(v_1 - v_2) = MV \quad ① \\ m(v_1^2 - v_2^2) = MV^2 \end{cases}$$

La seconda equazione può essere riscritta come:

$$\underbrace{m(v_1 - v_2)}_{MV}(v_1 + v_2) = MV^2$$

Quindi avrò:

$$(v_1 + v_2) MV = MV^2$$

Da cui:

$$v_1 + v_2 = V$$

Sostituendo nella ① si ottiene:

$$m(v_1 - v\ ) = M(v_1 + v_2)$$

$$v_1 (m - M) = v_2 (M + m)$$

Da cui:

$$v_2 = \frac{m - M}{m + M} v_1 = -0.6\ m/s$$

Il primo corpo infatti, dopo l'urto procede in direzione opposta. Per il secondo corpo posso allora ricavare la velocità:

$$V = v_1 + \frac{m - M}{m + M} v_1 = \frac{m + M + m - \cancel{M}}{m + M} v_1 = \frac{2m}{m_1 + M} v_1 = 0.9\ m/s$$

Per determinare la lunghezza totale del percorso in salita devo conoscere l'energia potenziale finale del corpo M. Applico quindi la conservazione dell'energia:

$$Mgh = \frac{1}{2} M V^2$$

Da cui:

$$h = \frac{V^2}{2g} = 0.04\ m$$

E il tratto lungo il piano inclinato sarà:

$$l = \frac{h}{\operatorname{sen}\theta} = \frac{V^2}{2g \operatorname{sen}\theta} = \frac{2m^2}{(M+m)^2} \frac{v_1^2}{g \operatorname{sen}\theta} = 0.08\ m$$

ESERCIZIO

Due punti materiali di massa $m_1 = 1\,kg$ e $m_2 = 2\,kg$ sono posti su una guida circolare liscia ad un'altezza h dal suolo. Ad un certo istante i punti vengono lasciati liberi di muoversi e urtano fra loro in modo completamente anelastico. Calcolare l'altezza H raggiunta dal sistema dopo l'urto.

$h = 3\,m$

$m_1 = 1\,kg,\ m_2 = 2\,kg$

Fino all'istante prima dell'urto l'energia meccanica si conserva, perché la guida è liscia. Possiamo allora scrivere:

$$m_1 g h = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 \longrightarrow v_1 = \sqrt{2gh}$$

$$m_2 g h = \frac{1}{2} m_2 v_2^2 \longrightarrow v_2 = \sqrt{2gh}$$

Essendo poi l'urto anelastico, si conserverà solo la quantità di moto.

$$m_1 v_1 - m_2 v_2 = (m_1 + m_2) V$$

dove V è la velocità dei due corpi dopo l'urto (essi si sono uniti perché l'urto è completamente anelastico). Notiamo poi che il segno $-$ al primo membro esprime il fatto che i due corpi procedevano in senso contrario.

Ricaviamo allora:

$$V = \frac{m_1 v_1 - m_2 v_2}{m_1 + m_2}$$

nel nostro caso, come visto, $v_1 = v_2 = v = \sqrt{2gh}$, quindi:

$$V = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v$$

Subito dopo l'urto si conserva di nuovo l'energia meccanica per il nuovo corpo che si è formato. Se H è l'altezza raggiunta dal sistema dopo l'urto, avremo:

$$(m_1 + m_2) g H = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) V^2$$

Da cui:

$$H = \frac{V^2}{2g} = \frac{(m_1 - m_2)^2}{(m_1 + m_2)^2} \frac{v^2}{2g} = \frac{(m_1 - m_2)^2}{(m_1 + m_2)^2} \frac{2gh}{\cancel{2g}} = 0.33\,m$$