

Trasporto in Semiconduttori – Esercizi con soluzioni

Fisica della Materia Condensata

Dipartimento di Matematica e Fisica

Università degli Studi Roma Tre

A.A. 2019/2020

TRASPORTO IN SEMICONDUCTORI E METALLI.

①

RECAP FORMULE IMPORTANTI.

In un semiconduttore intrinseco (= omogeneo, privo di impurezze o uniformemente drogato) a $T=0$ tutti gli stati di valenza sono occupati e tutti gli stati di conduzione sono vuoti.

A $T \neq 0$ alcuni elettroni della banda di valenza sono eccitati termicamente alla banda di conduzione.

In un semiconduttore intrinseco il numero di elettroni in banda di conduzione ad una certa T è uguale al numero di lacune possiede in banda di valenza

$$n(T) = p(T)$$

$$\text{A } T=0 \quad n(T=0) = p(T=0) \equiv 0$$

Il potenziale chimico $E_g < \mu(T=0) < E_c$ si trova nella gap-

Un semiconduttore intrinseco è NON-DEGENERE

se $\mu(T)$ si trova dentro la energy gap ed è lontano di $\sim k_B T$ dai bordi delle bande:

$$E_c - \mu(T) \gg k_B T$$

①

$$\mu(T) - E_v \gg k_B T$$

In un semiconduttore intrinseco, il potenziale chimico intrinseco vale

(2)

$$\textcircled{2} \quad \mu_i(T) = \frac{1}{2}(E_v + E_c) + \frac{1}{2} k_B T \ln \frac{N_v(T)}{N_c(T)}$$

Si può vedere che a $T=0$ il potenziale chimico si trova a metà della gap di energia

$$\mu_i(T=0) = \frac{1}{2}(E_v + E_c) = E_v + \frac{E_g}{2}$$

A $T \neq 0$ $\mu_i(T)$ si sposta dalla metà della gap dell'ordine di qualche $k_B T$.

La concentrazione intrinseca di elettroni e buche all'equilibrio può essere scritta:

$$\textcircled{3} \quad n_i(T) = p_i(T) = \sqrt{N_c(T) N_v(T)} e^{-E_g/2k_B T}$$

Da cui si vede che la dipendenza delle concentrazioni di portatori intrinseci è principalmente controllata da $e^{-E_g/2k_B T}$, più la debole dipendenza da T delle densità degli stati effettivi delle bande di conduzione e valenza $N_c(T)$ e $N_v(T)$.

Da equ. (3) otteniamo la MASS-ACTION LAW

$$n(T) p(T) = N_c(T) N_v(T) e^{-E_g/k_B T} \equiv n_i^2(T) = p_i^2(T)$$

Nel caso di isotropic-parabolic two-band model di semiconduttore si può ottenere

$$N_C(T) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{2m_c^*}{\hbar^2} \right)^{3/2} (k_B T)^{3/2}$$

$$(4) \quad = 2.534 \left(\frac{m_c^*}{m_0} \frac{T}{T_0} \right)^{3/2} 10^{19} \text{ cm}^{-3} \quad (T_0 = 300\text{K})$$

$$N_V(T) = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \frac{1}{2\pi^2} \left(\frac{2m_v^*}{\hbar^2} \right)^{3/2} (k_B T)^{3/2}$$

Utilizzando la (4) e sostituendo in (2) otteniamo

$$(5) \quad \mu_i(T) = \frac{1}{2} (E_V + E_C) + \frac{3}{4} k_B T \ln \left(\frac{m_v^*}{m_c^*} \right)$$

Sostituendo la (4) in (3) otteniamo:

$$(6) \quad n_i(T) = p_i(T) = \frac{1}{4} \left(\frac{2k_B T}{\pi \hbar^2} \right)^{3/2} (m_c^* m_v^*)^{3/4} e^{-E_G/2k_B T}$$

In regime intrinseco la densità di elettroni dipende dalla Temperatura come:

$$n_i(T) \sim T^{3/2} e^{-E_G/2k_B T}$$

Relazioni generali di elettroni in banda di conduzione e lacune in banda di valenza:

$$(7) \quad \begin{aligned} n(T) &= N_C(T) e^{(\mu - E_C)/k_B T} \\ p(T) &= N_V(T) e^{-(\mu - E_V)/k_B T} \end{aligned}$$

Aggiungiamo impurezze donatrici o accettrici nei semiconduttori e vediamo come cambiano
 Densità di Portatori e Livello di Fermi

(4)

- n-type semiconduttori (DONATORI)

N_d è la densità di donatori

E_d è l'energia di ionizzazione del livello donatore

μ shifta verso la banda di conduzione

Definiamo $k_B T_d \equiv E_d$, T_d temperatura di ionizzazione.

L'equazione $n(T) = p(T)$ diventa

$$n(T) = N_d [1 - P(E_d)] + p(T)$$

cioè gli elettroni in banda di conduzione sono dati sia da eccitazione termica di elettroni di valenza che da ionizzazione termica di livelli donatori.

$\mu(T)$ si trova tra E_d e E_c (livello donatore e banda di conduzione)

$$\mu(T) = \frac{1}{2}(E_d + E_c) + \frac{1}{2} k_B T \ln \frac{N_d}{2 N_c(T)}$$

$$n(T) = \sqrt{\frac{N_c(T) N_d}{2}} e^{-E_d/2k_B T}$$

A buona T tutti i livelli donatori sono occupati

VERY LOW T
 $T \ll T_d$

(5)

SATURATION REGION

$$T \sim T_d, \quad T \ll E_g/k_B$$

Quasi tutti i livelli donatori sono ionizzati, mentre l'eccitazione termica degli elettroni di valenza è trascurabile.

$$n(T) = N_c(T) e^{-(E_c - \mu)/k_B T} = N_d$$

$$\Rightarrow \mu(T) = E_c + k_B T \ln \frac{N_d}{N_c(T)}$$

Il numero di portatori maggioritari è essenzialmente costante e uguale a N_d .

Dalla mass action law:

$$n(T)p(T) = n_i^2(T)$$

con $n_i^2(T) \ll N_d$ e $n(T) \sim N_d$

$$\Rightarrow p(T) \approx \frac{n_i^2(T)}{N_d}$$

INTRINSIC REGION

$$T \gg T_d$$

L'eccitazione termica di elettroni di valenza in banda di conduzione aumenta fino a restaurare la situazione intrinseca.

DISTRIBUZIONI FUORI EQUILIBRIO E TRASPORTO -

Densità di corrente

$$\vec{J}_n = \frac{ne^2 \tau_n}{m_n^*} \vec{E} \equiv ne \mu_n \vec{E}$$

n = densità di elettroni
 e = carica elettrica
 τ_n = intervallo tra collisioni

m_n^* = massa effettiva in banda di conduzione

$$\mu_n = \frac{e \tau_n}{m_n^*} \Rightarrow \text{mobilità elettronica}$$

$$\vec{J}_p = \frac{pe^2 \tau_p}{m_p^*} \vec{E} = pe \mu_p \vec{E}$$

$$\sigma = ne \mu_n + pe \mu_p \Rightarrow \text{conduttività elettrica}$$

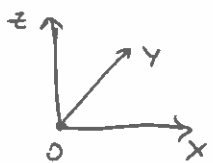
$$\vec{J}_{TOT} = \sigma \vec{E}$$

ESERCIZIO 1

(7)

Derivare l'espressione del coefficiente di Hall per un semiconduttore in funzione della mobilità μ_n e μ_p e delle densità n e p dei portatori di carica.

SOLUZIONE



elettroni: \vec{v}_e
lacune: \vec{v}_p

Consideriamo un campione rettangolare nel piano xy .
Sia applicato un campo elettrico in direzione x
e un campo magnetico in direzione z : E_x, B_z .

Il campo elettrico causa un drift degli elettroni in
direzione $-x$ e delle lacune in direzione x .

A causa di questo moto il campo magnetico esercita
una forza di Lorentz $q\vec{v} \times \vec{B}$ sui portatori di
carica in direzione $-y$ che causa la deflessione
della carica verso le pareti C e D.

Ciò produce un campo elettrico di Hall in direzione y .
 $E_H = E_y$.

La conducibilità elettrica di un semiconduttore è

$$\sigma = nq\mu_n + pq\mu_p$$

con n = concentrazione elettroni
 p = " lacune

μ_n = mobilità
elettronica
 μ_p = mobilità buche

Nello stato stazionario non c'è corrente netta lungo y
 quindi la densità di corrente $S_y = 0$

(8)

$$S_y = (S_p)_y + (S_m)_y = 0$$

$$\begin{aligned} (S_p)_y &= \sigma_p E_y^{\text{TOT}} = p q \mu_p (E_y - (J_p)_x B_z) = \\ &= p q \mu_p (E_y - \mu_p E_x B_z) \quad \text{con } J_{px} = \mu_p E_x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (S_m)_y &= n q \mu_n E_y^{\text{TOT}} = n q \mu_n (E_y - (J_m)_x B_z) = \\ &= n q \mu_n (E_y + \mu_n E_x B_z) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow S_y = p q \mu_p (E_y - \mu_p E_x B_z) + n q \mu_n (E_y + \mu_n E_x B_z) = 0$$

$$(p q \mu_p + n q \mu_n) E_y = (p q \mu_p^2 - n q \mu_n^2) E_x B_z$$

$$E_y = \frac{p \mu_p^2 - n \mu_n^2}{p \mu_p + n \mu_n} E_x B_z$$

$$R_H = \frac{E_y}{S_x B_z}, \quad S_x = \sigma E_x = (p q \mu_p + n q \mu_n) E_x$$

$$\Rightarrow R_H = \frac{E_y}{\sigma \cdot E_x B_z} = \frac{1}{q} \frac{p \mu_p^2 - n \mu_n^2}{(p \mu_p + n \mu_n)^2}$$

Intriusaco ; $m = p \Rightarrow R_H = \frac{1}{q m} \frac{\mu_p - \mu_n}{\mu_p + \mu_n}$

Proteggio forte $m \gg p \Rightarrow R_H = \frac{1}{q} \frac{-n \mu_n^2}{m^2 \mu_n^2} = -\frac{1}{q m}$

$m \ll p \Rightarrow R_H = \frac{1}{q m}$

ESERCIZIO 2.

In un semiconduttore intrinseco, la concentrazione degli elettroni $n(T)$ a 500K e a 600K sia;

$$n(500K) = 2.5 \cdot 10^{20} \text{ m}^{-3}$$

$$n(600K) = 2 \cdot 10^{21} \text{ m}^{-3}$$

e la conducibilità sia $\sigma(500K) = 4 \cdot 10^{-4} \Omega^{-1} \text{ m}^{-1}$

Sapendo che in tale semiconduttore il potenziale chimico μ_i si trova sempre a metà della gap di energia e ipotizzando che le mobilità degli elettroni e delle lacune siano indipendenti dalla temperatura tra 500K e 600K, e $\mu_n = 4 \mu_p$, determinare:

- a) l'energia della gap
- b) la massa efficace dei portatori
- c) i tempi di rilassamento per elettroni e lacune.

FORMULE UTILI

Conducibilità: $\sigma = n e \mu_n + p e \mu_p$ (1)

Potenziale chimico intrinseco:

$$\mu_i(T) = \frac{1}{2} (E_v + E_c) + \frac{3}{4} k_B T \ln \left(\frac{m_v^*}{m_c^*} \right) \quad (2)$$

Densità intrinseca di elettroni:

$$n_i(T) = \frac{1}{4} \left(\frac{2k_B T}{\pi \hbar^2} \right)^{3/2} (m_c^* m_v^*)^{3/4} e^{-E_g/2k_B T} \quad (3)$$

Soluzione:

(10)

In un semiconduttore intrinseco il numero di elettroni di conduzione ad una certa T è uguale al numero di buche lasciate nella banda di valenza

$$n(T) = p(T) = n_i(T)$$

\hookrightarrow intrinseco

Poiché sappiamo che il potenziale chimico si trova sempre a metà della gap a qualunque temperatura, allora dall'equazione (2) deriviamo

$$\mu_i(T) = \frac{1}{2}(E_V + E_C) \Rightarrow \ln \frac{n_i^*}{m_c^*} = 0$$

Le masse efficaci dei due portatori sono uguali.

$$\Downarrow$$

$m_v^* = m_c^* \equiv m^*$

\Rightarrow La conducibilità del semiconduttore può essere scritta da equ. (1)

$$\sigma(T) = n_i(T) e (\mu_n + \mu_p)$$

e la densità di elettroni da equ (3)

$$n_i(T) = \frac{1}{4} \left(\frac{2k_B T}{\pi k_1^2} \right)^{3/2} m^{*3/2} e^{-E_G/2k_B T}$$

a) Ricaviamo E_G dal rapporto tra la densità a 2 Temp:

$$\frac{n_i(600K)}{n_i(500K)} = \left(\frac{600K}{500K} \right)^{3/2} \exp \left[-\frac{E_G}{2k_B} \left(\frac{1}{600K} - \frac{1}{500K} \right) \right] = 8$$

$$\Rightarrow \frac{E_G}{2k_B 300K} = \ln \left[8 \cdot \left(\frac{5}{6} \right)^{3/2} \right]$$

$$E_G = 0,934 \text{ eV}$$

b) La massa efficace m^* la ricaviamo da una delle $m_i(T)$ note

$$m^* = \left(4 m_i(T) \right)^{2/3} \frac{\pi \hbar^2}{2k_B T} e^{E_G/2k_B T}$$

sostituendo $m_i(500K)$ e $T = 500K$

$$\text{trovo } m^* = 3.43 \cdot 10^{-31} \text{ Kg}$$

c) I tempi di rilassamento li ricaviamo dalle mobilità μ_p e μ_n con $\mu_n = 4\mu_p$

$$\mu_n = \frac{e \tau_n}{m^*} \quad \mu_p = \frac{e \tau_p}{m^*}, \text{ che non dipendono dalla temperatura.}$$

e utilizzando l'informazione sulla conducibilità: $\sigma(500K)$

$$\sigma(500K) = m_i(500K) \cdot e \cdot 5 \cdot \mu_p = m_i(500K) \frac{5e^2}{m^*} \tau_p$$

$$\Rightarrow \tau_p = \frac{m^* \sigma(500K)}{m_i(500K) \cdot 5 \cdot e^2} = 4.27 \cdot 10^{-18} \text{ s}$$

$$\tau_n = 4 \tau_p = 1.71 \cdot 10^{-17} \text{ s}$$

ESERCIZIO 3

(12)

Si abbia un semiconduttore intrinseco di cui siano note a $T = \text{ambiente}$ la conducibilità, il coefficiente di Hall e la mobilità degli elettroni:

$$\sigma(300\text{K}) = 4.5 \cdot 10^{-4} \Omega^{-1} \text{m}^{-1}$$

$$R_H(300\text{K}) = -2.35 \cdot 10^2 \text{m}^3 \text{C}^{-1}$$

$$\mu_n(300\text{K}) = 0.15 \text{m}^2 \text{V}^{-1} \text{s}^{-1}$$

Inoltre si conoscano a 600K , la mobilità di elettroni e lacune e la conducibilità:

$$\mu_n(600\text{K}) = 0.042 \text{m}^2 \text{V}^{-1} \text{s}^{-1}$$

$$\mu_p(600\text{K}) = 0.01 \text{m}^2 \text{V}^{-1} \text{s}^{-1}$$

$$\sigma(600\text{K}) = 83 \Omega^{-1} \text{m}^{-1}$$

Si determini:

- 1) La concentrazione dei portatori intrinseci a $T=300\text{K}$
- 2) L'energia della gap che è supposta indipendente dalla Temperatura tra 300K e 600K .

FORMULE UTILI

Conducibilità: $\sigma = n e \mu_n + p e \mu_p$

Costante di Hall: $R_H = \frac{1}{e} \frac{p \mu_p^2 - n \mu_n^2}{(p \mu_p + n \mu_n)^2}$

(13)

Soluzione

In un semiconduttore intrinseco

$$n(\tau) = p(\tau) = n_i(\tau)$$

quindi la conducibilità si può scrivere:

$$\sigma(\tau) = n_i(\tau) e (\mu_n + \mu_p)$$

e il coefficiente di Hall:

$$R_H = \frac{1}{n_i(\tau) e} \frac{\mu_p - \mu_n}{\mu_p + \mu_n}$$

1) Dal prodotto dei due a 300K otteniamo

$$\sigma(300K) \cdot R_H(300K) = \mu_p(300K) - \mu_n(300K)$$

e si ricavano la mobilità delle lacune a 300K

~~$$\mu_p(300K) = \left(\sigma \cdot R_H + \mu_n \right) \Big|_{300K} = 0.0443 \text{ V}^{-1} \text{ s}^{-1} \text{ m}^2$$~~

Ora dalla conducibilità a 300K si ricavano la densità di portatori intrinseci a 300K

$$n_i(300K) = \frac{\sigma(300K)}{e \cdot (\mu_n(300K) + \mu_p(300K))} = 1.45 \cdot 10^{16} \text{ m}^{-3}$$

$$\text{con } e = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

2) La gap di energia ce la ricaviamo dal rapporto di $n_i(T)$ a 2 diverse temperature

infatti $n_i(T) \sim T^{3/2} \exp\left[-\frac{E_g}{2k_B T}\right]$

ci ricaviamo $n_i(600K)$ come prima

$$n_i(600K) = \frac{B(600K)}{e \cdot (\mu_n(600K) + \mu_p(600K))} = 9.98 \cdot 10^{21} m^{-3}$$

$$\frac{n_i(600K)}{n_i(300K)} = \left(\frac{600K}{300K}\right)^{3/2} \exp\left[-\frac{E_g}{2k_B} \left(\frac{1}{600K} - \frac{1}{300K}\right)\right]$$

$$0.69 \cdot 10^6 = 2^{3/2} \exp\left[\frac{E_g}{2k_B \cdot 600K}\right]$$

$$E_g = (1200K) \cdot k_B \ln\left[\frac{0.69 \cdot 10^6}{2^{3/2}}\right] = 1.28 eV$$

ESERCIZIO 4

In un semiconduttore intrinseco la concentrazione dei portatori liberi a due temperature è data da:

$$n_i(200\text{K}) = 7.6 \cdot 10^{12} \text{ cm}^{-3}, \quad n_i(300\text{K}) = 8.7 \cdot 10^{14} \text{ cm}^{-3}$$

Mentre la gap interbanda varia con la Temperatura

$$\text{secondo la legge } E_g(T)/k_B = E_0 - \frac{AT^2}{T + \delta 3\text{K}}$$

1) Si determini il valore della gap a 400K sapendo che la densità efficace di elettroni è

$$\text{come vale: } N_c(T) = 1.68 \cdot 10^{13} T^{3/2} \text{ K}^{2/3} \text{ cm}^{-3}$$

$$N_v(T) = 1.27 \cdot 10^{15} T^{3/2} \text{ K}^{2/3} \text{ cm}^{-3}$$

FORMULE UTILI:

Concentrazione intrinseca di elettroni e buche:

$$n_i(T) = p_i(T) = \sqrt{N_c(T) N_v(T)} e^{-E_g/2k_B T}$$

Soluzione

La gap interbanda dipende dalla temperatura, quindi stavolta non la prendiamo dal rapporto delle concentrazioni intrinseche a due temperature, ma poiché conosciamo $N_C(T)$ e $N_V(T)$, ad ogni T ci calcoliamo la rispettiva $E_G(T)$

$$n_i(T) = \sqrt{N_C(T) N_V(T)} e^{-E_G(T)/2k_B T} =$$

$$= 1.46 \cdot 10^{14} \cdot T^{3/2} \left[\text{K}^{2/3} \text{cm}^{-3} \right] \cdot \exp \left[- \frac{E_G(T)}{2k_B T} \right]$$

@ 200 K :

$$7.6 \cdot 10^{12} \text{cm}^{-3} = 1.46 \cdot 10^{14} (200 \text{K})^{3/2} \left[\text{K}^{2/3} \text{cm}^{-3} \right] \exp \left[\frac{E_G(200\text{K})}{2k_B \cdot 200\text{K}} \right]$$

$$\Rightarrow \frac{E_G(200\text{K})}{k_B} = 400 \text{K} \ln \left[\frac{1.46 \cdot 10^{14} (200)^{3/2}}{7.6 \cdot 10^{12}} \right] = 4361.2 \text{K}$$

@ 300 K :

$$8.7 \cdot 10^{14} \text{cm}^{-3} = 1.46 \cdot 10^{14} (300)^{3/2} \text{cm}^{-3} \exp \left[\frac{E_G(300\text{K})}{2k_B \cdot 300\text{K}} \right]$$

$$\Rightarrow \frac{E_G(300\text{K})}{k_B} = 4062.5 \text{K}$$

→ Con questi due valori di $\frac{E_G(T)}{k_B}$ ci ricaviamo le costanti E_0 e A e dalla legge otteniamo $E_G(400\text{K})$

$$\left\{ \begin{array}{l} 4361.2 \text{ K} = E_0 - \frac{A (200)^2}{283} \text{ K} \\ 4062.5 \text{ K} = E_0 - \frac{A (300)^2}{383} \text{ K} \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} A = 3.19 \\ E_0 = 4812.1 \text{ K} \end{array} \right. \quad (17)$$

$$\rightarrow \frac{E_G(400\text{K})}{K_B} = 4812.1 \text{ K} - \frac{3.19 \cdot (400)^2}{483} \text{ K} = 3755.4 \text{ K}$$

$$E_G(400\text{K}) = 3755.4 \text{ K} \cdot K_B = 0.324 \text{ eV}$$

ESERCIZIO 5

(18)

In un campione si trova $\mu_n = 3600 \text{ cm}^2 \text{ V}^{-1} \text{ s}^{-1}$ e $\mu_p = 1600 \text{ cm}^2 \text{ V}^{-1} \text{ s}^{-1}$. Il campione non mostra effetto Hall. Quale frazione della densità di corrente \vec{J} è trasportata dalle Buche? $\left[\frac{J_p}{J_{\text{tot}}} \right]$

Soluzione

Non si ha effetto Hall $\Rightarrow R_H = 0$

$$R_H = \frac{1}{q} \frac{p\mu_p^2 - n\mu_n^2}{(p\mu_p + n\mu_n)^2} = 0 \rightarrow n\mu_n^2 = p\mu_p^2$$

$$\Rightarrow \frac{p}{n} = \frac{\mu_n^2}{\mu_p^2} = \left(\frac{3.6}{1.6} \right)^2 = 5.06$$

$$\vec{J}_{\text{tot}} = \vec{J}_n + \vec{J}_p = (nq\mu_n + pq\mu_p) \vec{E}$$

$$\Rightarrow \frac{J_p}{J_{\text{tot}}} = \frac{p\mu_p}{n\mu_n + p\mu_p} = \frac{p/n}{p/n + \mu_n/\mu_p} =$$

$$= \frac{5.06}{5.06 + \frac{3.6}{1.6}} = 0.69 = 69\%$$

ESERCIZIO 6

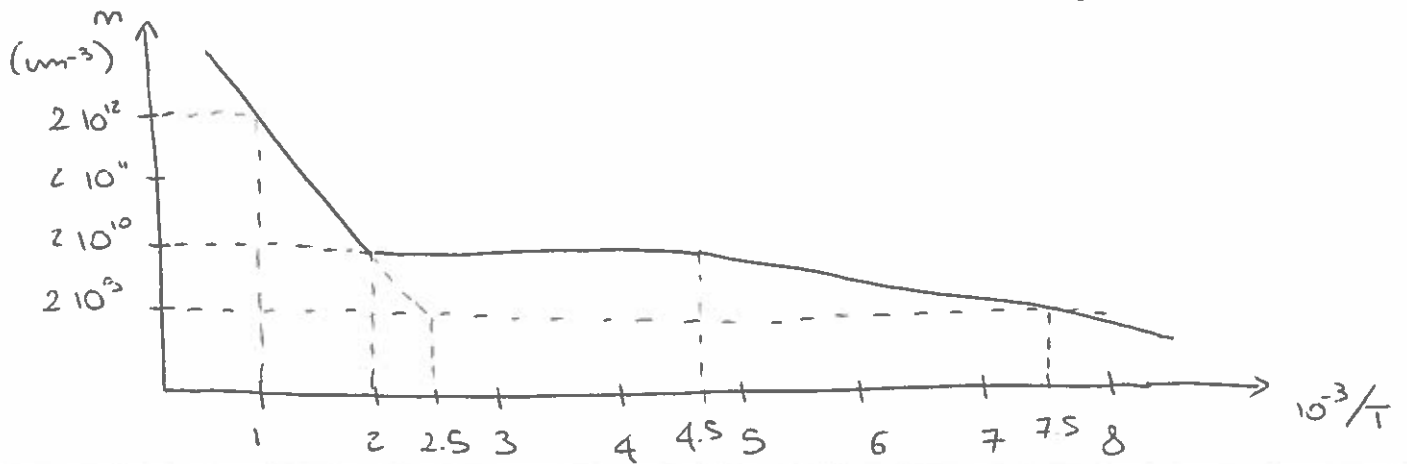
(13)

In un semiconduttore puro di accettore la banda di conduzione è descritta dalla relazione:

$$E(\vec{k}) = E_g + A [\sin^2(ak_x) + \sin^2(ak_y) + \sin^2(ak_z)]$$

con $a = 0.3 \text{ nm}$ e $A = 5 \text{ eV}$.

La densità di elettroni n è riportata in figura in scala semilogaritmica verso $1/T$ e il tempo medio τ tra due urti è $\tau = 10^{13} \text{ s}$.



- Commentare il grafico
- Trovare l'energia della gap, E_g
- Dimostrare che a $T = 400 \text{ K}$ $n \gg p$
- Trovare la conducibilità G e il cammino libero medio degli elettroni a $T = 400 \text{ K}$.

Soluzioni

a) La doppia pendenza indica che il semiconduttore è drogato. Il drogaggio è di tipo n (donatori).

1) Nel regime a bassa T

$$\frac{1000}{T_1} \approx 4.5 \quad T_1 \sim 220K$$

per $T < T_1$ tutti i livelli donori sono occupati

$$n(T) = \sqrt{N_c(T) \frac{N_d}{2}} e^{-E_d/2k_B T}$$

E_d è l'energia di ionizzazione del livello donore

$\mu(T)$ si trova tra E_d ed E_c (livello donore e livello banda di conduzione)

2) Nel regime intermedio tra T_1 e $\frac{1000}{T_2} \sim 2 \Rightarrow T_2 = 500K$

quasi tutti i donori sono ionizzati

$$\text{Quindi } n(T) = N_d = 2 \cdot 10^{10} \text{ cm}^{-3}$$

↳ concentrazione di donori

$$p \ll n$$

3) Nel regime ad alte temperature $T > 500K$

risale nel regime intrinseco

$$n(T) = p(T) = n_i(T)$$

$$n_i(T) \sim T^{3/2} e^{-E_g/2k_B T}$$

a T alte domina l'esponenziale

$$\Rightarrow n_i(T) \propto \exp\left[\frac{-E_g}{2k_B T}\right], \quad E_g = \text{energia della gap}$$

b) L'energia della gap, E_g la ricaviamo dal regime ad alte T , dal rapporto di n a due temperature T_A e T_B (21)

$$\frac{1000}{T_A} = 1 \quad \frac{1000}{T_B} = 2$$

$$\frac{2 \cdot 10^{12}}{2 \cdot 10^{10}} = \frac{n(T_A)}{n(T_B)} = \exp \left[-\frac{E_g}{2k_B} \left(\frac{1}{T_A} - \frac{1}{T_B} \right) \right]$$

$$\ln 10^2 = \frac{E_g}{2k_B} 10^{-3} \text{ K}^{-1}$$

$$\Rightarrow E_g = 2 \cdot 10^3 k_B \ln(10^2) \text{ K} = 9210 k_B \cdot \text{K} = 0.792 \text{ eV}$$

c) A 400 K $\left(\frac{1000}{T} = 2.5 \right)$ siamo in regione

intermedia per cui $n(T) = N_d = 2 \cdot 10^{10} \text{ cm}^{-3}$

Il corrispondente valore a 400 K della densità di portatori intrinseci $n_i(T)$ lo possiamo trovare dall'extrapolazione del grafico ad alte

$$T \text{ fino a } \frac{1000}{T} = 2.5$$

$$n_i(400 \text{ K}) = 2 \cdot 10^9 \text{ cm}^{-3}$$

La densità dei minoritari (lacune) la otteniamo dalla mass-action law:

$$n(T) p(T) = n_i^2(T)$$

$$\Rightarrow p(400\text{K}) = \frac{m_i(400\text{K})^2}{m(400\text{K})} = \frac{(2 \cdot 10^9)^2}{2 \cdot 10^{10}} \text{ cm}^{-3} = 2 \cdot 10^8 \text{ cm}^{-3} \quad (22)$$

per cui $p \ll n$ due ordini di grandezza.

d) A 400K $p \ll n \Rightarrow$ la conducibilità è data solo dagli elettroni:

$$\sigma = \frac{m_e^2 z_e}{m_e^*} \quad n = 2 \cdot 10^{10} \text{ cm}^{-3}$$

L'unica incognita è la massa efficace degli elettroni in banda di conduzione, che ci aspettiamo stare nel minimo della banda, data la banda derivata, e ci ricaviamo dalla derivata seconda di $E(\vec{k})$

$$m_e^* = \hbar^2 \left[\frac{\partial^2 E(\vec{k})}{\partial k^2} \right]^{-1}$$

vicino al minimo della banda sia $x \sim x$

$$\Rightarrow E(\vec{k}) \cong E_g + A a^2 (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) = E_g + A a^2 k^2$$

$$\frac{\partial^2 E(\vec{k})}{\partial k^2} = 2A a^2$$

$$m_e^* = \frac{\hbar^2}{2A a^2} = 7.72 \cdot 10^{-32} \text{ Kg} = 0.085 m_e \quad (m_e = 9.11 \cdot 10^{-31} \text{ Kg})$$

$$\Rightarrow \sigma(400\text{K}) = 0.66 \cdot 10^{-3} \Omega^{-1} \text{ m}^{-1}$$

Il cammino libero medio λ è dato dalla velocità termica per il tempo medio tra 2 urti: $\lambda = v_e \tau_e$

$$v_e \cong v_T = \sqrt{\frac{3k_B T}{m_e^*}} \quad (\text{da equipartizione dell'energia } \frac{1}{2} m_e^* v_T^2 = \frac{3}{2} k_B T) \Rightarrow \lambda = 4.63 \cdot 10^{-8} \text{ m}$$

ESERCIZIO 7

23

a) Stimare la resistività di un semiconduttore intrinseco a $T = 290\text{K}$ sapendo che

$$E_g = 1.4\text{eV} ; N_c = 4 \cdot 10^{23}\text{m}^{-3}, N_v = 8.1 \cdot 10^{24}\text{m}^{-3}$$

$$\mu_e = 8500\text{cm}^2\text{V}^{-1}\text{s}^{-1}, \mu_p = 400\text{cm}^2\text{V}^{-1}\text{s}^{-1}, \rho = \frac{1}{\sigma}$$

b) Se il ~~una~~ semiconduttore è drogato n, con concentrazione di impurezza $N_d = 10^{14}\text{cm}^{-3}$ ed energia di ionizzazione delle impurezza $E_d = 0.01\text{meV}$ tale che tutte le impurezza sono ionizzate a $T = 290\text{K}$ si chiede di:

b₁) scrivere l'equazione di neutralità di carica

b₂) determinare la posizione del potenziale chimico,

sapendo che per un semiconduttore di tipo n, in approssimazione di non degenerazione,

$$n = N_c e^{\frac{\mu - E_c}{k_B T}}, \text{ e valutare } n \text{ a } T = 290\text{K}$$

vale l'approssimazione di non degenerazione.

b₃) Calcolare il nuovo valore della resistività, assumendo che la mobilità dei portatori non sia cambiata. Determinare prima se il comportamento è intrinseco o estrinseco.

b₄) Tracciare un grafico approssimato di $\ln n(T)$ vs $1/k_B T$ per il semiconduttore drogato, specificando la pendenza e la temperatura che segna il passaggio da alte T a T intermedie.

a) FORMULE NECESSARIE

$$\sigma = n e \mu_e + p q \mu_p \rightarrow \mu_e, \mu_p \text{ mobilità di elettroni e lacune}$$

$$n(T) = p(T) = n_i(T) \rightarrow \text{semiconduttore intrinseco}$$

$$n_i(T) = \sqrt{N_c N_v} \exp\left[-\frac{E_g}{2k_B T}\right]$$

Dai dati del problema ricaviamo:

$$n_i(T) = \sqrt{4 \cdot 10^{23} \text{ m}^{-3} \cdot 8.1 \cdot 10^{24} \text{ m}^{-3}} \exp\left[-\frac{1.4 \text{ eV}}{2k_B \cdot 290 \text{ K}}\right] =$$

$$= 1.16 \cdot 10^{12} \text{ m}^{-3}$$

$$\sigma(T) = n_i(T) \cdot e [\mu_e(T) + \mu_p(T)]$$

$$\rho = \frac{1}{\sigma(T=290\text{K})} = \frac{1}{n_i(290\text{K}) \cdot e} \frac{1}{\mu_e(290\text{K}) + \mu_p(290\text{K})} =$$

$$= \frac{1}{1.16 \cdot 10^{12} \text{ m}^{-3} \cdot 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C}} \frac{1}{(8500 + 400) \text{ m}^2 \text{ V}^{-1} \text{ s}^{-1}} = 6.05 \cdot 10^6 \Omega \text{ m}$$

b) A $T = 290 \text{ K}$ gli stati donatori sono esauriti essere completamente ionizzati \Rightarrow

$$n(T) = p(T) + N_d^+(T) = p(T) + N_d$$

\downarrow
densità donori
ionizzati a T

\downarrow
densità
impurezza
nel semiconduttore

b2) A $T = 290\text{K}$

(25)

$$n_i(290\text{K}) = 1.16 \cdot 10^{12} \text{ m}^{-3}$$

$$N_d^+(290\text{K}) = N_d = 10^{14} \text{ cm}^{-3} = 10^{20} \text{ m}^{-3}$$

$$\Rightarrow n \approx N_d$$

Oppure stimiamo $n(T)$ esattamente usando la legge di carica di massa

$$n_i^2(T) = n(T) p(T)$$

Moltiplichiamo l'equazione di neutralità di carica per $n(T)$ e otteniamo

$$n^2(T) = \underbrace{n(T) p(T)}_{n_i^2(T)} + N_d n(T)$$

$$n^2(T) = n_i^2(T) + N_d n(T)$$

$$n^2(T) - N_d n(T) - n_i^2(T) = 0$$

$$\Rightarrow n(T) = \frac{N_d \pm \sqrt{N_d^2 + 4n_i^2(T)}}{2} \approx N_d$$

Siamo in regime intermedio \Rightarrow

$$n(T) = N_c(T) e^{\frac{\mu - E_c}{k_B T}} \quad \text{con } n(T) \approx N_d$$

$$\Rightarrow E_c - \mu = k_B T \ln \frac{N_c}{N_d} = 0.207 \text{ eV}$$

Ipotesi di non degenerazione; $E_c - \mu \gg k_B T$

$$\left. \frac{E_c - \mu}{k_B T} \right|_{290\text{K}} = \ln \frac{N_c}{N_d} = 8.3 \Rightarrow \frac{E_c - \mu}{k_B T} \gg 1$$

quindi l'ipotesi è giustificata.

b3) A $T = 290\text{ K}$ $n \approx Nd$ quindi siamo in regime estrinseco. (26)

Per drogaggio di tipo n in regime estrinseco

$$p \ll n$$

↳ verificandolo usando la legge di conservazione di massa $p(T) = \frac{n_i^2(T)}{n(T) \approx Nd} =$

$$= \frac{(1.16 \cdot 10^{12} \text{ m}^{-3})^2}{10^{20} \text{ m}^{-3}} = 1.3 \cdot 10^4 \text{ m}^{-3} \ll n(T)$$

⇒ nel calcolo della conducibilità trascuriamo i portatori di tipo p

$$\sigma = n e \mu_e = Nd \cdot e \cdot \mu_e$$

$$\rho = \frac{1}{\sigma} = 7.35 \cdot 10^{-2} \Omega \text{ m}$$

b4) Ad alte $T \Rightarrow$ comportamento intrinseco

$$n(T) = n_i(T) \propto e^{-\frac{E_g}{2k_B T}} \quad \text{Trascuro } T^{3/2} \text{ ad alte } T$$

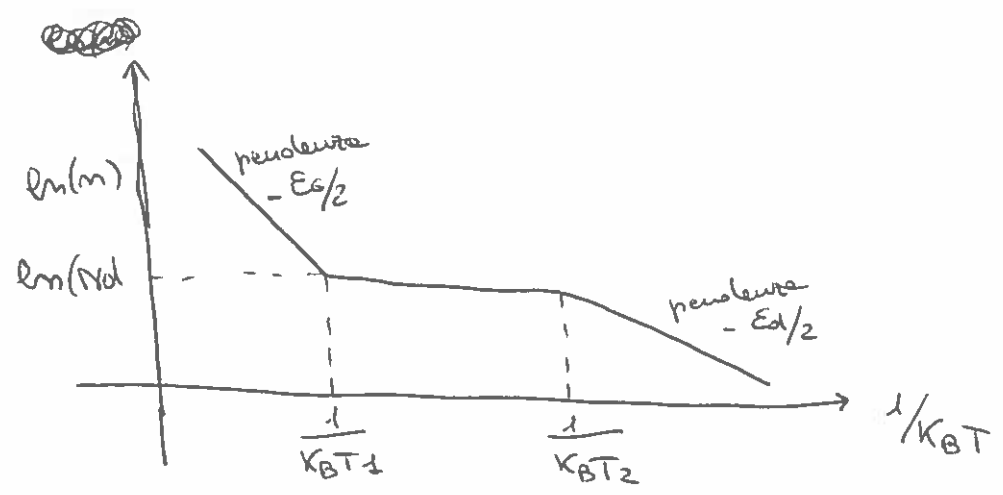
$$\Rightarrow \ln n(T) \propto -\frac{E_g}{2} \frac{1}{k_B T}$$

A T intermedie $n(T) \approx Nd$ plateau

A basse $T \rightarrow$ comportamento estrinseco

$$n(T) = N_c e^{-\frac{E_d}{k_B T}}$$

$$\Rightarrow \ln n(T) \propto -\frac{E_d}{k_B T}$$



T_1 = passaggio da alte T a T intermedie

T_2 = passaggio da basse T a T intermedie

I due andamenti $n(T) = n_i(T)$ e
 $n(T) = Nd$

devo incontrarsi a T_1

$$\Rightarrow n(T_1) = Nd$$

$$\sqrt{N_c N_v} \cdot \exp\left[-\frac{E_g}{2k_B T_1}\right] = Nd$$

$$+\frac{E_g}{2k_B T_1} = -\ln \frac{Nd}{\sqrt{N_c N_v}} = +\ln \frac{\sqrt{N_c N_v}}{Nd}$$

$$T_1 = \frac{E_g}{2k_B} \left(\ln \frac{\sqrt{N_c N_v}}{Nd}\right)^{-1} = 830K$$

A $T = T_2$ si incontrano $n(T) = Nd$ e

$$n(T) = \sqrt{\frac{N_c N_d}{2}} \exp\left[-\frac{E_c - E_d}{2k_B T}\right]$$

Esercizio 11

In un semiconduttore intrinseco la densità degli elettroni di conduzione n a 300 K è:

$$n = N_C e^{(\mu - E_g)/K_B T}$$

dove $E_g = 0.5$ eV, $N_C = 10^{19} \text{ m}^{-3}$ e il potenziale chimico μ coincide con l'energia di Fermi a $T = 0$ K. I portatori dei due segni, elettroni in banda di conduzione e lacune in banda di valenza, hanno la stessa massa efficace. Inoltre le misure di trasporto forniscono a 300 K una conducibilità elettrica $\sigma = 1.5 \cdot 10^{-3} \Omega^{-1} \text{ m}^{-1}$ e una costante di Hall R_H che, nel SI, vale:

$$R_H = \frac{1}{e} \frac{p\mu_p^2 - n\mu_n^2}{(p\mu_p + n\mu_n)^2} = 2 \cdot 10^3 \text{ m}^{-3} / \text{C}$$

1. Si ricavino le mobilità delle buche e degli elettroni μ_b e μ_e .
2. Sapendo che la banda di conduzione ha la forma: $E(k) = \frac{10\hbar^2 k^2}{m_0}$, si trovino i tempi medi di scattering τ_b e τ_e .

Costanti e formule utili

$$\hbar = 1.054 \cdot 10^{-27} \text{ erg}\cdot\text{s}$$

$$e = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

$$m_0 = 9.1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$$

$$1 \text{ eV} = 1.6 \cdot 10^{-12} \text{ erg}$$

$$1 \text{ eV} / K_B = 11605 \text{ K}$$

Soluzione

1. Se il semiconduttore è intrinseco si ha $n = p = n_i$, inoltre se le masse efficaci dei portatori sono uguali, allora il potenziale chimico si trova a metà gap $\mu = E_g/2$. Per cui a 300 K:

$$n_i = n = p = N_C \exp(-E_g/2K_B T) = 10^{19} \exp(-0.5 \cdot 11605/2 \cdot 300) = 6.31 \cdot 10^{14} \text{ m}^{-3}$$

Conducibilità e costante di Hall nel caso di un semiconduttore intrinseco possono essere riscritte come:

$$\begin{aligned} \sigma &= pe\mu_p + ne\mu_n = n_i e (\mu_p + \mu_n) \\ R_H &= \frac{1}{e} \frac{p\mu_p^2 - n\mu_n^2}{(p\mu_p + n\mu_n)^2} = \frac{1}{n_i e} \frac{\mu_p - \mu_n}{\mu_p + \mu_n} \end{aligned}$$

Mettendole a sistema si ottiene:

$$\begin{aligned} \mu_p + \mu_n &= \frac{\sigma}{n_i e} \\ \mu_p - \mu_n &= \sigma R_H \end{aligned}$$

dalle quali otteniamo le mobilità dei due portatori:

$$\mu_p = \frac{\sigma}{2} \left(\frac{1}{n_i e} + R_H \right) = 1.186 \text{ m}^2 \text{V}^{-1} \text{s}^{-1}$$
$$\mu_n = \frac{\sigma}{2} \left(\frac{1}{n_i e} - R_H \right) = 0.786 \text{ m}^2 \text{V}^{-1} \text{s}^{-1}$$

2. La massa efficace dell'elettrone si trova derivando due volte la banda di conduzione, inoltre sappiamo che le masse dei portatori sono uguali, per cui:

$$m_e^* = m_p^* = \hbar^2 \left(\frac{\partial^2 E_C}{\partial k^2} \right) = \frac{m_0}{20} = 0.455 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$$

conoscendo le mobilità troviamo i tempi di scattering:

$$\tau_p = \frac{\mu_p m_p^*}{e} = 3.37 \text{ s}$$
$$\tau_n = \frac{\mu_n m_n^*}{e} = 2.23 \text{ s}$$

Esercizio 12 - Simulazione prova di esonero AA 2014/2015

Un semiconduttore viene drogato con atomi accettori in concentrazione $N_A = 6.4 \cdot 10^{19} \text{ m}^{-3}$ ed energia di legame ϵ_a . A $T = 10 \text{ K}$ le lacune hanno un tempo medio di scattering $\tau_h = 1.2 \cdot 10^{-12} \text{ s}$ e una mobilità $\mu_h = 0.75 \text{ m}^2/\text{Vs}$. La costante di Hall alla stessa temperatura vale $R_H = 28 \text{ m}^3/\text{C}$. Le masse efficaci di elettroni e lacune sono uguali ed indipendenti dalla temperatura.

1. Determinare ϵ_a e la conducibilità elettrica a $T = 10 \text{ K}$ sapendo che $\epsilon_g = 25\epsilon_a$, dove ϵ_g è l'energia di gap.
2. Determinare la conducibilità elettrica a $T = 300 \text{ K}$ sapendo che a questa temperatura $\tau_h = \tau_e/3 = 0.5 \cdot 10^{-13} \text{ s}$.
3. Considerate un semiconduttore intrinseco. Quale tipo di drogaggio si ottiene a temperatura ambiente inserendo nel semiconduttore un'impurezza ogni 100 atomi del semiconduttore? Quest'ultimo cristallizza in una struttura *fcc* di costante reticolare $a=5.65 \text{ \AA}$.

Costanti e formule utili

$$\hbar = 1.054 \cdot 10^{-34} \text{ J}\cdot\text{s} = 6.583 \cdot 10^{-16} \text{ eV}\cdot\text{s}$$

$$K_B = 1.38 \cdot 10^{-23} \text{ J}\cdot\text{K}^{-1} = 1.38 \cdot 10^{-16} \text{ erg/K} = 8.62 \cdot 10^{-5} \text{ eV/K}$$

$$e = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

$$m_0 = 9.1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$$

$$1 \text{ eV} = 11605 \text{ K}$$

$$k_F = \left(3\pi^2 \frac{N}{V}\right)^{\frac{1}{3}}$$

Soluzione

1. A 10 K si ha:

$$p(10\text{K}) = \frac{1}{qR_H(10\text{K})} = 2.23 \cdot 10^{17} \text{ m}^{-3}$$

$$\sigma(10\text{K}) = qp\mu_h = \frac{\mu_h}{R_H(10\text{K})} = 2.7 \cdot 10^{-2} \text{ m}^{-1}\Omega^{-1}$$

Inoltre vale:

$$p(T) = \sqrt{\frac{N_V(T)N_A}{2}} \exp\left(-\frac{\epsilon_a}{2K_B T}\right) \quad \text{con} \quad N_V(T) = \frac{1}{4} \left(\frac{2m_V^* K_B T}{\pi \hbar^2}\right)^{3/2}$$

invertendola si trova l'energia di legame degli accettori:

$$\epsilon_a = -2K_B T \ln \left(p(T) \sqrt{\frac{2}{N_V(T)N_A}} \right)$$

la massa m_V^* che compare in $N_V(T)$ la prendiamo dalla mobilità a 10 K :

$$m_V^* = \frac{q\tau_h}{\mu_h} = 2.56 \cdot 10^{-31} \text{ Kg} \quad \implies \quad N_V(10\text{K}) = 2.28 \cdot 10^{22} \text{ m}^{-3}$$

Ora abbiamo tutti i dati per trovare ϵ_a :

$$\epsilon_a = -2K_B(10\text{K})\ln\left(p(10\text{K})\sqrt{\frac{2}{N_V(10\text{K})N_A}}\right) = 165K_BK = 14.2 \text{ meV}$$

2. a 300 K dobbiamo controllare la densità di portatori intrinseci per capire in quale regime siamo:

$$p_i(T) = \sqrt{N_C(T)N_V(T)} \exp\left(-\frac{\epsilon_g}{2K_B T}\right) = \sqrt{N_C(T)N_V(T)} \exp\left(-\frac{25\epsilon_a}{2K_B T}\right)$$

Inoltre, dato che le masse sono uguali e indipendenti dalla temperatura si ha che:

$$\frac{N_V(T_1)}{N_V(T_2)} = \frac{N_C(T_1)}{N_C(T_2)} = \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{3/2}$$

Con $T_1 = 300 \text{ K}$ e $T_2 = 10 \text{ K}$ otteniamo:

$$p_i(300\text{K}) = N_V(10\text{K}) \left(\frac{300}{10}\right)^{3/2} \exp\left(-\frac{4125}{600}\right) = 3.87 \cdot 10^{21} \text{ m}^{-3}$$

poichè $p_i \gg N_A$ siamo in regime intrinseco per cui:

$$\sigma(300\text{K}) = qp_i(\mu_h + \mu_e) = \frac{q^2}{m^*} p_i(\tau_h + \tau_e) = \frac{4q^2}{m^*} p_i \tau_h = 77.4 \text{ m}^{-1}\Omega^{-1}$$

3. Il drogaggio cercato (di tipo n o p non ci interessa ora) è 1/100 della densità atomica del solido:

$$N_{drog} = \frac{N}{V} \frac{1}{100} = \frac{4}{a^3} \frac{1}{100} = 2.22 \cdot 10^{26} \text{ m}^{-3}$$

Esercizio 13 - Es. 4 Appello I AA 2014/2015

Un semiconduttore viene drogato con atomi donori in concentrazione N_D . Una misura a diverse temperature della costante di Hall nel sistema ha dato i seguenti risultati: a 800 K è nulla mentre nell'intervallo di temperature (220-260) K essa risulta in ottima approssimazione costante e pari a $-0.189 \text{ C}^{-1}\text{m}^3$. Inoltre è noto che la temperatura di cross-over tra il regime ad alte temperature e il regime a temperature intermedie è $T^*=300 \text{ K}$; che la transizione di Mott avviene ad una concentrazione di impurezze pari a $N_{\text{Mott}} = 3.73 \cdot 10^{24} \text{ m}^{-3}$; che le masse di lacune ed elettroni sono uguali fra loro e pari alla massa dell'elettrone m_0 . Le mobilità e le masse dei portatori non dipendono dalla temperatura. La mobilità degli elettroni vale $\mu_e = 50 \text{ cm}^2/\text{Vs}$. La costante dielettrica relativa del materiale è $\epsilon_r = 14$. Determinare:

1. La concentrazione del drogaggio N_D .
2. L'energia di legame dell'impurezza nel modello idrogenoide.
3. L'energia di gap supposta indipendente dalla temperatura.
4. La conducibilità a 800 K.

S ricordano le seguenti formule:

- Energia di legame e raggio dell'orbita nel modello idrogenoide

$$\epsilon_n = \frac{m_e^*}{m_0} \frac{1}{\epsilon_r^2} \frac{1}{n^2} \text{Ry}; \quad a_n = \frac{m_0}{m_e^*} \epsilon_r n^2 a_B$$

- La costante di Hall in presenza di due portatori (h lacune, e elettroni), nel sistema SI

$$R_H = \frac{1}{q} \frac{p\mu_h^2 - n\mu_e^2}{(p\mu_h + n\mu_e)^2}$$

Soluzione

1. La costante di Hall è costante tra 220 K e 160 K, quindi in questo intervallo la densità degli elettroni n è costante e pari al drogaggio N_D (regime intermedio):

$$R_H = -\frac{1}{qn} = -\frac{1}{qN_D} \implies N_D = \frac{-1}{qR_H} = \frac{1}{1.6 \cdot 10^{-19} \cdot 0.189} \text{ m}^{-3} = 3.3 \cdot 10^{19} \text{ m}^{-3}$$

A queste temperature non si può essere in regime intrinseco perchè qui si avrebbe:

$$R_H = \frac{1}{qn_i} \frac{\mu_p - \mu_e}{\mu_p + \mu_e}$$

il testo ci dice che $\mu_p = \mu_e$ a tutte le temperature, per tanto nel regime intrinseco si deve avere sempre $R_H = 0$.

Inoltre non possiamo neanche essere nel regime a basse temperature perchè qui la densità dei maggioritari (n) dipende dalla temperatura e dunque necessariamente anche R_H .

- 2.

$$N_{\text{Mott}} = \left(\frac{4}{3} \pi a_n^3 \right)^{-1} \implies a_n = \left(\frac{4}{3} \pi N_{\text{Mott}} \right)^{-1/3} = 4 \text{ nm}$$

Si ha: $\epsilon_n a_n = \frac{R_y a_B}{\epsilon_r}$, dalla quale possiamo trovare l'energia di legame cercata ($\epsilon_n = \epsilon_d$) :

$$\epsilon_d = \frac{R_y a_B}{\epsilon_r a_n} = \frac{13.6 \cdot 0.05}{14 \cdot 4} \text{ eV} = 0.012 \text{ eV}$$

3. A T^* l'andamento a temperature intermedie ($n(T) = N_D$) deve incontrarsi con l'andamento ad alte temperature ($n(T) = n_i(T)$, $n_i(T)$ è la densità di portatori intrinseci), ovvero a T^* deve valere $N_D = n_i(T^*)$:

$$N_D = \sqrt{N_C N_V} \exp \left[-\frac{E_g}{2K_B T^*} \right]$$

dove $N_{C,V} = 2.534 \left(\frac{m_{C,V}^*}{m_0} \frac{T}{300 \text{ K}} \right)^{3/2} \cdot 10^{25} \text{ m}^{-3}$ sono le densità degli stati della banda di conduzione/valenza (Grosso, pag. 477). Poichè si ha che $m_C^* = m_V^* = m_0$ ad ogni temperatura, le due densità sono uguali fra loro ad ogni temperatura. Calcoliamo l'energia della gap:

$$N_C(T^*) = 2.534 \cdot 10^{25} \text{ m}^{-3}$$

$$E_g = 2K_B T^* \ln \left(\frac{N_C(T^*)}{N_D} \right) = 600 \text{ K} \ln \left(\frac{2.534 \cdot 10^{25}}{3.3 \cdot 10^{19}} \right) = 8131 \cdot K_B \text{ K} = 0.7 \text{ eV}$$

4. A 800 K ($> T^*$) siamo in regime intrinseco, elettroni e lacune hanno dunque stessa concentrazione, pari a quella intrinseca ($n = p = n_i$), e, quanto detto prima anche stessa mobilità. . La conducibilità è pertanto:

$$\sigma(T) = q (n(T)\mu_e + p(T)\mu_h) = q n_i(T) (\mu_e + \mu_h) = 2 q n_i(T) \mu_e$$

A 800 K si ha pertanto:

$$n_i(800 \text{ K}) = 2.534 \left(\frac{800}{300} \right)^{3/2} \exp \left[-\frac{8131}{1600} \right] \cdot 10^{25} \text{ m}^{-3} = 6.85 \cdot 10^{23} \text{ m}^{-3}$$

$$\sigma(800 \text{ K}) = 2 \cdot 1.6 \cdot 10^{-19} \cdot 6.58 \cdot 10^{23} \cdot 50 \cdot 10^{-4} \text{ C m}^{-1}/\text{V s} = 1096 \text{ m}^{-1}\Omega^{-1}$$

Esercizio 14 - Es. 4 Appello II AA 2014/2015

Si consideri un semiconduttore drogato n alla temperatura di 4 K. La densità degli atomi donatori è $N_D = 10^{13} \text{ cm}^{-3}$, la massa degli elettroni di conduzione è $m_e^* = 0.3m_e$ e l'energia di ionizzazione degli atomi donatori è $\epsilon_d = 30 \text{ meV}$. Calcolare:

1. La densità degli elettroni nella banda di conduzione;
2. Lo spostamento del potenziale chimico rispetto al minimo della banda di conduzione.
3. Il semiconduttore è degenere o non degenere?
4. Sapendo che in regime intrinseco le densità dei portatori sono $n_i(300 \text{ K}) = 4.2 \cdot 10^{13} \text{ cm}^{-3}$ e $n_i(350 \text{ K}) = 6.8 \cdot 10^{14} \text{ cm}^{-3}$, trovare il valore della gap del semiconduttore. Eseguire questo calcolo con la massima precisione possibile.

Costanti utili:

$K_B = 1.38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K} = 8.62 \cdot 10^{-5} \text{ eV/K}$; $m_e = 9.11 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$; $\hbar = 1.054 \cdot 10^{-34} \text{ J s} = 6.583 \cdot 10^{-16} \text{ eV s}$

Soluzione

1. Nel regime a basse temperature la densità dei portatori maggioritari (di tipo n) è data da:

$$n(T) = \sqrt{\frac{N_C(T)N_D}{2}} e^{-\epsilon_d/2K_B T}$$

La densità della banda di conduzione ($N_C(T)$) a 4 K vale:

$$N_C(4 \text{ K}) = 2.534 \left(\frac{m_c^*}{m_0} \frac{4 \text{ K}}{300 \text{ K}} \right)^{3/2} \cdot 10^{19} \text{ cm}^{-3} = 2.534 \left(0.3 \frac{4}{300} \right)^{3/2} \cdot 10^{19} \text{ cm}^{-3} = 6.4 \cdot 10^{15} \text{ cm}^{-3}$$

mentre $K_B T|_{4 \text{ K}} = 3.448 \cdot 10^{-4} \text{ eV}$, risulta quindi:

$$n(4 \text{ K}) = \sqrt{\frac{6.4 \cdot 10^{15} \cdot 10^{13}}{2}} e^{-30/2 \cdot 0.3448} \text{ cm}^{-3} = 2.3 \cdot 10^{-5} \text{ cm}^{-3}$$

2. Il potenziale chimico si può trovare dalla relazione generale degli elettroni in banda di conduzione $n(T) = N_C(T)e^{(\mu - E_C)/K_B T}$. Invertendola si trova:

$$\mu(T) - E_C = K_B T \ln \left[\frac{n(T)}{N_C(T)} \right]$$

Che a 4 K fornisce il valore:

$$\mu(4 \text{ K}) - E_C = K_B(4 \text{ K}) \ln \left[\frac{n(4 \text{ K})}{N_C(4 \text{ K})} \right] = -1.6 \cdot 10^{-2} \text{ eV} = -16 \text{ meV}$$

3. A 4 K il potenziale chimico è 16 meV sotto il minimo della banda di conduzione, il semiconduttore è non degenere. Infatti a $T = 4 \text{ K}$ si ha che $K_B T \ll E_C - \mu$.
4. In regime intrinseco, la densità degli elettroni $n_i(T)$ dipende dalla temperatura come:

$$n_i(T) \sim T^{3/2} e^{-E_g/2K_B T}$$

Calcoliamo il rapporto $n_i(350 \text{ K})/n_i(300 \text{ K})$:

$$\frac{n_i(350 \text{ K})}{n_i(300 \text{ K})} = \left(\frac{350}{300}\right)^{3/2} \exp\left[-\frac{E_g}{2K_B} \left(\frac{1}{350 \text{ K}} - \frac{1}{300 \text{ K}}\right)\right]$$

Invertendo questa relazione si trova l'energia di gap E_g :

$$\begin{aligned} E_g &= -2K_B \ln \left[\frac{n_i(350 \text{ K})}{n_i(300 \text{ K})} \left(\frac{350}{300}\right)^{-3/2} \right] \left(\frac{1}{350 \text{ K}} - \frac{1}{300 \text{ K}}\right)^{-1} = \\ &= -2(8.62 \cdot 10^{-5}) \ln \left[\frac{6.8 \cdot 10^{14}}{4.2 \cdot 10^{13}} \left(\frac{350}{300}\right)^{-3/2} \right] \left(\frac{1}{350} - \frac{1}{300}\right)^{-1} \text{ eV} = \\ &= 0.92 \text{ eV} \end{aligned}$$

Esercizio 15 - Es. 4 Appello I AA 2015/2016

Un semiconduttore viene drogato con atomi donori in concentrazione $N_D = 5.2 \cdot 10^{19} \text{ m}^{-3}$.

La temperatura che segna il crossover tra il regime ad alte temperature ed il regime a temperature intermedie è $T_1 = 300 \text{ K}$, mentre la temperatura che segna il crossover tra il regime a temperature intermedie ed il regime a basse temperature è $T_2 = 110 \text{ K}$.

La mobilità degli elettroni μ_e , la mobilità delle lacune μ_p e le masse efficaci m_e^* , m_p^* dei portatori non dipendono dalla temperatura.

È inoltre noto che $\mu_e = 1.2 \text{ m}^2\text{V}^{-1}\text{s}^{-1}$ e $\mu_p = 0.8 \text{ m}^2\text{V}^{-1}\text{s}^{-1}$; che le masse efficaci dei portatori sono uguali fra loro ($m_e^* = m_p^*$); che a $T = 600 \text{ K}$ la densità degli stati in banda di conduzione vale $N_C(600\text{K}) = 4.0 \cdot 10^{24} \text{ m}^{-3}$.

Determinare:

1. La conducibilità elettrica a $T = 450 \text{ K}$.
2. La conducibilità elettrica a $T = 100 \text{ K}$.
3. La conducibilità elettrica a $T = 200 \text{ K}$.
4. Il contributo dei portatori minoritari alla conducibilità elettrica a $T = 200 \text{ K}$.

Valori delle costanti:

$$e = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

$$m_0 = 9.11 \cdot 10^{-31} \text{ Kg}$$

$$K_B = 1.38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K} = 8.62 \cdot 10^{-5} \text{ eV/K}$$

$$\hbar = 1.054 \cdot 10^{-34} \text{ J s} = 6.583 \cdot 10^{-16} \text{ e Vs}$$

Soluzione esercizio 4

Poichè le masse efficaci dei portatori sono indipendenti dalla temperatura e uguali fra loro, le densità degli stati in banda di conduzione e di valenza sono uguali ad ogni temperatura: $N_C(T) = N_V(T)$.

Inoltre possiamo sempre scrivere $N_C(T)$ in funzione di un suo valore noto (nel nostro caso facciamo riferimento al dato a 600 K), per cui per il nostro semiconduttore valgono le seguenti relazioni:

$$n_i(T) = \sqrt{N_C(T)N_V(T)} e^{-E_g/(2K_B T)} = N_C(T) e^{-E_g/(2K_B T)}$$

$$N_C(T) = N_C(600) \left(\frac{T}{600} \right)^{3/2}$$

1. $T = 450 \text{ K} > T_1$, quindi si è in regime intrinseco e valgono:

$$\sigma(T) = n_i(T)e(\mu_e + \mu_p)$$

$$n_i(T) = N_C(600) \left(\frac{T}{600} \right)^{3/2} e^{-E_g/(2K_B T)}$$

L'energia della gap si ricava uguagliando il drogaggio alla densità dei portatori intrinseci a T_1 :

$$N_D = n_i(T_1) = N_C(600) \left(\frac{T_1}{600} \right)^{3/2} e^{-E_g/(2K_B T_1)}$$

$$\frac{E_g}{2K_B} = T_1 \ln \left(\frac{N_C(600)}{N_D} \left(\frac{T_1}{600} \right)^{3/2} \right) = (300)\text{K} \ln \left(\frac{4 \cdot 10^{24}}{5.2 \cdot 10^{19}} \left(\frac{1}{2} \right)^{3/2} \right) = 3063.25 \text{ K}$$

Densità dei portatori intrinseci e conducibilità a 450 K sono dunque:

$$n_i(450) = N_C(600) \left(\frac{450}{600} \right)^{3/2} e^{-3063.25 \cdot (450^{-1})} = 2.87 \cdot 10^{21} \text{ m}^{-3}$$

$$\sigma(450) = n_i(450)e(\mu_e + \mu_p) = 2.87 \cdot 10^{21} \text{ m}^{-3} \cdot 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 2 \text{ m}^2 \text{V}^{-1} \text{s}^{-1} = 9.2 \cdot 10^2 \text{ m}^{-1} \Omega^{-1}$$

2. $T=100 \text{ K} < T_2$, quindi si è in regime di basse temperature ($p \ll n$) e valgono:

$$\sigma(T) = n(T)e\mu_e$$

$$n(T) = \sqrt{\frac{N_C(T)N_D}{2}} e^{-\epsilon_D/(2K_B T)}$$

L'energia del livello donore si ricava uguagliando il drogaggio alla densità degli elettroni a T_2 :

$$N_D = n(T_2) = \sqrt{\frac{N_C(T_2)N_D}{2}} e^{-\epsilon_D/(2K_B T_2)} = \sqrt{\frac{\left(\frac{T_2}{600}\right)^{3/2} N_C(600)N_D}{2}} e^{-\epsilon_D/(2K_B T_2)}$$

$$\epsilon_D/K_B = T_2 \ln \left(\frac{N_C(600)}{2N_D} \left(\frac{T_2}{600} \right)^{3/2} \right) = (110)\text{K} \ln \left(\frac{4 \cdot 10^{24}}{10.4 \cdot 10^{19}} \left(\frac{110}{600} \right)^{3/2} \right) = 881.4\text{K}$$

Densità degli elettroni e conducibilità a 100 K sono dunque:

$$n(100) = \sqrt{\frac{N_C(100)N_D}{2}} e^{-\epsilon_D/(2K_B(100 \text{ K}))} = \sqrt{\frac{N_C(600) \left(\frac{100}{600}\right)^{3/2} N_D}{2}} e^{-\epsilon_D/(2K_B(100 \text{ K}))} = 3.25 \cdot 10^{19} \text{ m}^{-3}$$

$$\sigma(100) = n(100)e\mu_e = 3.25 \cdot 10^{19} \text{ m}^{-3} \cdot 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 1.2 \text{ m}^2 \text{V}^{-1} \text{s}^{-1} = 6.24 \text{ m}^{-1} \Omega^{-1}$$

3. A $T = 200 \text{ K}$ ($T_1 < T < T_2$) si è in regime intermedio, per cui $n \sim N_D$ e $p \ll n$:

$$\sigma(200) = N_D e \mu_e = 5.2 \cdot 10^{19} \text{ m}^{-3} \cdot 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 1.2 \text{ m}^2 \text{V}^{-1} \text{s}^{-1} = 9.98 \text{ m}^{-1} \Omega^{-1}$$

4. A $T = 200 \text{ K}$ i minoritari (lacune) hanno densità e conducibilità elettrica:

$$p = \frac{n_i^2(200)}{n} = \frac{n_i^2(200)}{N_D} = \frac{\left(\frac{200}{600}\right)^3 N_C^2(600) \exp\{-E_g/(K_B \cdot 200)\}}{N_D} = 5.67 \cdot 10^{14} \text{ m}^{-3}$$

$$\sigma_p(200) = p(200)e\mu_p = 7.3 \cdot 10^{-5} \text{ m}^{-1} \Omega^{-1}$$

il contributo è dunque cinque ordini di grandezza minore di quello dei maggioritari.

Esercizio 16 - Es. 4 Appello II AA 2015/2016

Un semiconduttore con costante dielettrica relativa $\epsilon_r = 11$, viene drogato con soli atomi donori. La banda di conduzione può essere ben approssimata a tutte le temperature dall'espressione: $E_c(k) = E_g + Ak^2$, dove E_g è l'energia della gap ed A una costante.

A $T = 450$ K e $T = 800$ K, entrambe in regime intrinseco, le densità degli elettroni valgono $n(450) = 2 \cdot 10^{16} \text{ cm}^{-3}$ e $n(800) = 2 \cdot 10^{18} \text{ cm}^{-3}$. Si sa inoltre che $T = 400$ K segna il passaggio al regime estrinseco, che la transizione di Mott avviene ad una concentrazione di impurezze pari a $N_{\text{Mott}} = 3 \cdot 10^9 \text{ cm}^{-3}$ e che le masse efficaci di elettroni e lacune sono uguali fra loro. Determinare:

1. Il valore dell'energia di gap E_g .
2. Il drogaggio N_D .
3. L'energia di legame delle impurezze ϵ_D .
4. La mobilità elettronica μ_e , sapendo che il tempo di scattering degli elettroni vale $\tau = 4$ ps.
5. Il valore della costante A .

Costanti: $K_B = 1.38 \cdot 10^{-23} \text{ J/K} = 8.62 \cdot 10^{-5} \text{ eV/K}$, $\hbar = 1.054 \cdot 10^{-34} \text{ J s} = 6.583 \cdot 10^{-16} \text{ eV s}$,
 $e = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$, $m_0 = 9.11 \cdot 10^{-31} \text{ Kg}$, $a_B = 0.05 \text{ nm}$, $R_y = 13.6 \text{ eV}$.

Fattori di conversione: $1 \text{ uma} = 1.66 \cdot 10^{-24} \text{ g}$

Soluzione

$$\textcircled{1} \quad n_i(T) \sim T^{3/2} \exp\left(-\frac{E_g}{2k_B T}\right)$$

$$\frac{n_i(800)}{n_i(450)} = \left(\frac{800}{450}\right)^{3/2} \exp\left[-\frac{E_g}{2k_B} \left(\frac{1}{800} - \frac{1}{450}\right)\right]$$

$$E_g = \frac{2k_B}{\left(\frac{1}{800} - \frac{1}{450}\right)} \ln \left[\left(\frac{800}{450}\right)^{3/2} \frac{n_i(450)}{n_i(800)} \right] =$$

$$= \frac{2 \cdot 8.62 \cdot 10^{-5} \text{ eV/K}}{\left(\frac{1}{800} - \frac{1}{450}\right) \text{ K}^{-1}} \ln \left[\left(\frac{80}{45}\right)^{3/2} 10^{-2} \right] = 0,29 \text{ eV}$$

$$\frac{E_g}{2k_B} = 3849,04 \text{ K}$$

② a $T=400\text{K}$: $n_i(400) = N_D$

$$N_D = n_i(400) = \left(\frac{400}{450}\right)^{3/2} n(450) \exp\left[-\frac{E_g}{2k_B} \left(\frac{1}{400\text{K}} - \frac{1}{450\text{K}}\right)\right] =$$

$$= \left(\frac{40}{45}\right)^{3/2} \cdot 2 \cdot 10^{18} \text{ cm}^{-3} e^{-3849 \left(\frac{1}{400} - \frac{1}{450}\right)} =$$

$$= 5,75 \cdot 10^{15} \text{ cm}^{-3}$$

③ $N_{\text{max}} = \frac{1}{\frac{4}{3}\pi a_d^3}$ a_d : raggio orbita empresse

$$a_n E_n = \frac{1}{\epsilon_r} R_y a_B$$

$$a_d = \sqrt[3]{\frac{3}{4\pi N_{\text{max}}}}$$

$$e_d = \frac{R_y a_B}{\epsilon_r} \sqrt[3]{\frac{4\pi N_{\text{max}}}{3}} = \frac{13,6 \text{ eV} \cdot 0,05 \cdot 10^{-9} \text{ m}}{11 \cdot 10^{-2} \text{ m}} \sqrt[3]{\frac{4\pi \cdot 3 \cdot 10^9}{3}} =$$

$$= 0,143 \cdot 10^{-4} \text{ eV}$$

④ $\mu_c = \frac{e \hbar}{m_c^*}$ $N_c(T) = 2,534 \left(\frac{m_c^*}{m_0} \frac{T}{300}\right)^{3/2} 10^{19} \text{ cm}^{-3}$

$$N_c(800) = \frac{n_i(800)}{e^{-\frac{E_g}{2k_B(800\text{K})}}} = \frac{2 \cdot 10^{18} \text{ cm}^{-3}}{e^{-\frac{3249,64}{800}}} = 2,46 \cdot 10^{20} \text{ cm}^{-3}$$

$$m_c^* = m_0 \frac{300}{800} \left(\frac{N_c(800)}{2,534 \cdot 10^{19}}\right)^{2/3} = 15,54 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$$

$$\mu_c = \frac{1,6 \cdot 10^{-19} \text{ C} \cdot 4\pi\hbar}{15,54 \cdot 10^{-31} \text{ kg}} = 0,41 \text{ m}^2 \text{ s}^{-1} \text{ V}^{-1}$$

⑤ $m_c^* = \hbar^2 \left[\frac{\partial^2 E_c}{\partial k^2}\right]^{-1} = \frac{\hbar^2}{2A}$

$$A = \frac{\hbar^2}{2m_c^*} = \frac{1,054 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot 6,583 \cdot 10^{-16} \text{ eV s}}{2 \cdot 15,54 \cdot 10^{-31} \text{ kg}} = 0,22 \text{ eV m}^2 =$$

$$= 0,035 \cdot 10^{-37} \text{ J m}^2$$