Trasporto in Semiconduttori – Esercizi con soluzioni

Fisica della Materia Condensata

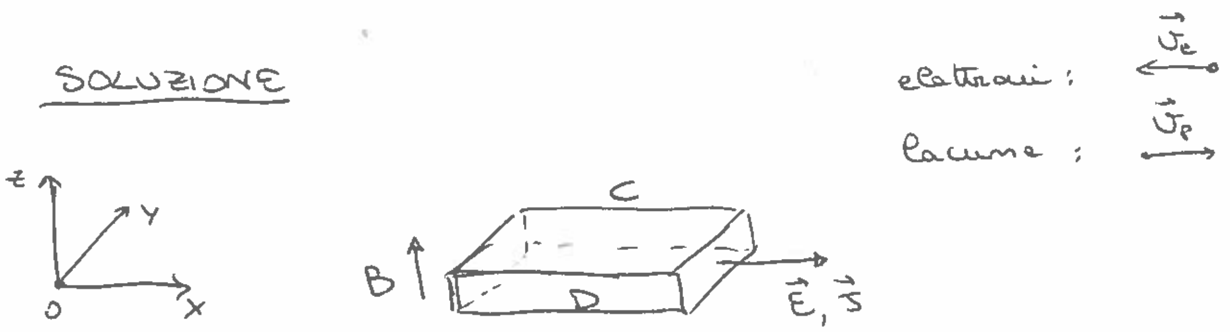
Dipartimento di Matematica e Fisica

Università degli Studi Roma Tre

ESERCIZIO 1

Derivare l'espressione del coefficiente di Hall per un semiconduttore in funzione della mobilità μ_n e μ_p e delle densità n e p dei portatori di carica.

SOLUZIONE



Consideriamo un campione rettangolare nel piano xy. Sia applicato un campo elettrico in direzione x e un campo magnetico in direzione z : E_x, B_z.

Il campo elettrico causa un drift degli elettroni in direzione $-x$ e delle lacune in direzione x.

A causa di questo moto il campo magnetico esercita una forza di Lorentz $q\vec{v} \times \vec{B}$ sui portatori di carica in direzione $-y$ che causa la deflessione delle cariche verso le pareti C e D.

Ciò produce un campo elettrico di Hall in direzione y. $E_H = E_y$.

La conducibilità elettrica di un semiconduttore è

$$\sigma = nq\mu_n + pq\mu_p$$

con n = concentrazione elettroni
p = " lacune

μ_n = mobilità elettronica
μ_p = mobilità buche

Nello stato stazionario non c'è corrente netta lungo y quindi la densità di corrente $J_y = 0$

8

$$J_y = (J_p)_y + (J_n)_y = 0$$

$$(J_p)_y = \sigma_p \mathcal{E}_y^{TOT} = pq\mu_p\left(\mathcal{E}_y - (v_p)_x B_z\right) =$$

$$= pq\mu_p\left(\mathcal{E}_y - \mu_p \mathcal{E}_x B_z\right) \qquad \text{con } v_{px} = \mu_p \mathcal{E}_x$$

$$(J_n)_y = nq\mu_n \mathcal{E}_y^{TOT} = nq\mu_n\left(\mathcal{E}_y - (v_n)_x B_z\right) =$$

$$= nq\mu_n\left(\mathcal{E}_y + \mu_n \mathcal{E}_x B_z\right)$$

$$\Rightarrow J_y = pq\mu_p\left(\mathcal{E}_y - \mu_p\mathcal{E}_x B_z\right) + nq\mu_n\left(\mathcal{E}_y + \mu_n \mathcal{E}_x B_z\right) = 0$$

$$(p\cancel{q}\mu_p + n\cancel{q}\mu_n)\,\mathcal{E}_y = (p\cancel{q}\mu_p^2 - n\cancel{q}\mu_n^2)\,\mathcal{E}_x B_z$$

$$\mathcal{E}_y = \frac{p\mu_p^2 - n\mu_n^2}{p\mu_p + n\mu_n}\,\mathcal{E}_x B_z$$

$$R_H = \frac{\mathcal{E}_y}{J_x B_z} \quad , \quad J_x = \sigma\,\mathcal{E}_x = (pq\mu_p + nq\mu_n)\,\mathcal{E}_x$$

$$\Rightarrow \boxed{R_H = \frac{\mathcal{E}_y}{\sigma \cdot \mathcal{E}_x B_z} = \frac{1}{q}\,\frac{p\mu_p^2 - n\mu_n^2}{(p\mu_p + n\mu_n)^2}}$$

Intrinseco ; $n = p \Rightarrow R_H = \dfrac{1}{qn}\,\dfrac{\mu_p - \mu_n}{\mu_p + \mu_n}$

Drogaggio forte $\quad n \gg p \qquad R_H = \dfrac{1}{q}\,\dfrac{-n\mu_n^2}{n^2\mu_n^2} = -\dfrac{1}{qn}$

$n \ll p \qquad R_H = \dfrac{1}{qn}$

ESERCIZIO 2.

In un semiconduttore intrinseco, la concentrazione degli elettroni $n(T)$ a 500K e a 600K sia:

$n(500K) = 2.5 \; 10^{20} \; m^{-3}$

$n(600K) = 2 \; 10^{21} \; m^{-3}$

e la conducibilità sia $\sigma(500K) = 4 \; 10^{-4} \; \Omega^{-1} m^{-1}$

Sapendo che in tale semiconduttore il potenziale chimico μ_i si trova sempre a metà della gap di energia e ipotizzando che le mobilità degli elettroni e delle lacune siano indipendenti dalla temperatura tra 500K e 600K, e $\mu_n = 4 \mu_p$, determinare:

a) ~~La~~ l'energia della gap

b) La massa efficace dei portatori

c) I tempi di rilassamento per elettroni e lacune.

FORMULE UTILI

Conducibilità: $\sigma = n e \mu_n + p e \mu_p$ (1)

Potenziale chimico intrinseco:

$$\mu_i(T) = \frac{1}{2}(E_v + E_c) + \frac{3}{4} K_B T \ln\left(\frac{m_v^*}{m_c^*}\right) \qquad (2)$$

Densità intrinseca di elettroni:

$$n_i(T) = \frac{1}{4}\left(\frac{2 K_B T}{\pi \hbar^2}\right)^{3/2} \left(m_c^* m_v^*\right)^{3/4} e^{-E_G/2K_BT} \qquad (3)$$

Soluzione:

In un semiconduttore intrinseco il numero di elettroni di conduzione ad una certa T è uguale al numero di buche lasciate nella banda di valenza

$$n(T) = p(T) = n_i(T)$$

↳ intrinseco

Poichè sappiamo che il potenziale chimico si trova sempre a metà della gap a qualunque temperatura, allora dall'equazione (2) deriviamo

$$\mu_i(T) = \frac{1}{2}(E_v + E_c) \Rightarrow \ln\frac{m_v^*}{m_c^*} = 0$$

$$\Downarrow$$

Le masse efficaci dei due portatori sono uguali.

$$\boxed{m_v^* = m_c^*} \equiv m^*$$

⇒ La conducibilità del semiconduttore può essere riscritta da equ. (1)

$$\sigma(T) = n_i(T)\, e\,(\mu_n + \mu_p)$$

e la densità di elettroni da equ (3)

$$n_i(T) = \frac{1}{4}\left(\frac{2K_BT}{\pi\hbar^2}\right)^{3/2} m^{*\,3/2}\, e^{-E_G/2K_BT}$$

a) Ricaviamo E_g dal rapporto tra le densità a 2 Temp:

$$\frac{n_i(600K)}{n_i(500K)} = \left(\frac{600K}{500K}\right)^{3/2} \exp\left[-\frac{E_G}{2K_B}\left(\frac{1}{600K} - \frac{1}{500K}\right)\right] = 8$$

$$\Rightarrow \quad \frac{E_G}{2K_B\,3000K} = \ln\left[8\cdot\left(\frac{5}{6}\right)^{3/2}\right]$$

$$E_G = 0{,}934\ eV$$

b) La massa efficace m^* la ricaviamo da una delle $n_i(T)$ note

$$m^* = \left(4\,n_i(T)\right)^{2/3}\ \frac{\pi\hbar^2}{2K_BT}\ e^{E_G/2K_BT}$$

sostituendo $n_i(500K)$ e $T = 500K$

trovo $m^* = 3.43\ 10^{-31}\ Kg$

c) I tempi di rilassamento li ricaviamo dalle mobilità μ_p e μ_n con $\mu_n = 4\mu_p$

$$\mu_n = \frac{e\,\tau_n}{m^*} \qquad \mu_p = e\,\frac{\tau_p}{m^*}$$, che non dipendono dalla temperatura.

e utilizzando l'informazione sulla conducibilità: $\sigma(500K)$

$$\sigma(500K) = n_i(500K)\,e\cdot 5\,\mu_p = n_i(500K)\frac{5e^2}{m^*}\,\tau_p$$

$$\Rightarrow \quad \tau_p = \frac{m^*\,\sigma(500K)}{n_i(500K)\cdot 5\cdot e^2} = 4.27\ 10^{-18}\,s$$

$$\tau_n = 4\tau_p = 1.71\cdot 10^{-17}\ s$$

ESERCIZIO 3

Si abbia un semiconduttore intrinseco di cui siano note a T= ambiente la conducibilità, il coefficiente di Hall e la mobilità degli elettroni:

$\sigma(300K) = 4.5 \; 10^{-4} \; \Omega^{-1} m^{-1}$

$R_H(300K) = -2.35 \cdot 10^{2} \; m^3 C^{-1}$

$\mu_n(300K) = 0.15 \; m^2 V^{-1} s^{-1}$

Inoltre si conoscono a 600K, la mobilità di elettroni e lacune e la conducibilità:

$\mu_n(600K) = 0.042 \; m^2 V^{-1} s^{-1}$

$\mu_p(600K) = 0.01 \; m^2 V^{-1} s^{-1}$

$\sigma(600K) = 83 \; \Omega^{-1} m^{-1}$

Si determini:

1) La concentrazione dei portatori intrinseci a T=300K

2) L'energia della gap che è supposta indipendente dalla Temperatura tra 300 K e 600 K.

FORMULE UTILI

Conducibilità: $\sigma = ne\mu_n + pe\mu_p$

Costante di Hall: $R_H = \dfrac{1}{e} \dfrac{p\mu_p^2 - n\mu_n^2}{(p\mu_p + n\mu_n)^2}$

Soluzione

In un semiconduttore intrinseco

$$n(T) = p(T) = n_i(T)$$

quindi la conducibilità si può scrivere:

$$\sigma(T) = n_i(T)\, e\, (\mu_n + \mu_p)$$

e il coefficiente di Hall:

$$R_H = \frac{1}{n_i(T)\, e} \; \frac{\mu_p - \mu_n}{\mu_p + \mu_n}$$

1) Dal prodotto dei due a 300 K otteniamo

$$\sigma(300K) \cdot R_H(300K) = \mu_p(300K) - \mu_n(300K)$$

e ci ricaviamo la mobilità delle lacune a 300 K

$$\mu_p(300K) = \left(\sigma \cdot R_H + \mu_n\right)\Big|_{300K} = 0.0443 \; V^{-1} s^{-1} m^2$$

Ora dalla conducibilità a 300 K ci ricaviamo la densità di portatori intrinseci a 300 K

$$n_i(300K) = \frac{\sigma(300K)}{e \cdot \left(\mu_n(300K) + \mu_p(300K)\right)} = 1.45 \cdot 10^{16} \, m^{-3}$$

con $e = 1.6 \; 10^{-19}$ C

2) La gap di energia ce la ricaviamo dal rapporto di $n_i(T)$ a 2 diverse temperature

infatti $$n_i(T) \sim T^{3/2} \exp\left[-\frac{E_G}{2K_BT}\right]$$

Ci ricaviamo $n_i(600K)$ come prima

$$n_i(600K) = \frac{\sigma(600K)}{e\cdot\left(\mu_n(600K) + \mu_p(600K)\right)} = 9.98\ 10^{21}\ m^{-3}$$

$$\frac{n_i(600K)}{n_i(300K)} = \left(\frac{600K}{300K}\right)^{3/2} \exp\left[-\frac{E_G}{2K_B}\left(\frac{1}{600K} - \frac{1}{300K}\right)\right]$$

$$0.69\ 10^6 = 2^{3/2} \exp\left[\frac{E_G}{2K_B\cdot 600K}\right]$$

$$E_g = (1200\ K)\cdot K_B \ \ln\left[\frac{0.69\ 10^6}{2^{3/2}}\right] = 1.28\ eV$$

ESERCIZIO 4

In un semiconduttore intrinseco la concentrazione dei portatori liberi a due temperature è data da:

$n_i(200K) = 7.6 \; 10^{12} \; cm^{-3}$, $n_i(300K) = 8.7 \; 10^{14} \; cm^{-3}$

Mentre la gap interbanda varia con la Temperatura secondo la legge $E_g(T)/K_B = E_0 - \frac{AT^2}{T+83K}$

1) Si determini il valore della gap a 400K sapendo che la densità efficace di elettroni e lacune vale:

$$N_C(T) = 1.68 \; 10^{13} \; T^{3/2} \; K^{2/3} \; cm^{-3}$$
$$N_V(T) = 1.27 \; 10^{15} \; T^{3/2} \; K^{2/3} \; cm^{-3}$$

FORMULE UTILI:

Concentrazione intrinseca di elettroni e buche:

$$n_i(T) = p_i(T) = \sqrt{N_C(T)\,N_V(T)}\; e^{-E_G/2K_BT}$$

Soluzione

La gap interbanda dipende dalla temperatura, quindi stavolta non la prendiamo dal rapporto delle concentrazioni intrinseche a due temperature, ma poiché conosciamo $N_C(T)$ e $N_V(T)$, ad ogni T ci calcoliamo la rispettiva $E_G(T)$

$$n_i(T) = \sqrt{N_C(T)\,N_V(T)}\; e^{-E_G(T)/2k_BT} =$$

$$= 1.46\ 10^{14} \cdot T^{3/2}\left[K^{2/3}\,cm^{-3}\right] \cdot \exp\left[-\frac{E_G(T)}{2K_BT}\right]$$

@ 200 K :

$$7.6\ 10^{12}\,cm^{-3} = 1.46 \cdot 10^{14}\,(200\,K)^{3/2}\left[K^{2/3}\,cm^{-3}\right]\exp\left[\frac{E_G(200K)}{2K_B \cdot 200K}\right]$$

$$\Rightarrow \frac{E_G(200K)}{K_B} = 400\,K\ \ln\left[\frac{1.46\ 10^{14}(200)^{3/2}}{7.6\ 10^{12}}\right] = 4361.2\,K$$

@ 300 K :

$$8.7\ 10^{14}\,cm^{-3} = 1.46\ 10^{14}\,(300)^{3/2}\,cm^{-3}\ \exp\left[\frac{E_G(300K)}{2K_B\,300K}\right]$$

$$\Rightarrow \frac{E_G(300K)}{K_B} = 4062.5\,K$$

→ Con questi due valori di $\frac{E_G(T)}{K_B}$ ci ricaviamo le costanti E_0 e A e dalla legge otteniamo $E_G(400K)$

(17)

$$\begin{cases} 4361.2\,K = \mathcal{E}_0 - \dfrac{A\,(200)^2}{283}\,k \\[2ex] 4062.5\,K = \mathcal{E}_0 - \dfrac{A\,(300)^2}{383}\,k \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = 3.19 \\[1ex] \mathcal{E}_0 = 4812.1\,K \end{cases}$$

$$\rightarrow \frac{\mathcal{E}_G(400K)}{K_B} = 4812.1\,K - \frac{3.19\cdot(400)^2}{483}\,K = 3755.4\,K$$

$$\mathcal{E}_G(400K) = 3755.4\,K \cdot K_B = 0.324\ eV$$

ESERCIZIO 5

In un campione si trova $\mu_n = 3600$ $cm^2 V^{-1} s^{-1}$ e $\mu_p = 1600$ $cm^2 V^{-1} s^{-1}$. Il campione non mostra effetto Hall. Quale frazione della densità di corrente è trasportata dalle Buche? [J_p / J_{TOT}]

Soluzione

Non si ha effetto Hall $\Rightarrow$ $R_H = 0$

$$R_H = \frac{1}{q} \frac{p\mu_p^2 - n\mu_n^2}{(p\mu_p + n\mu_n)^2} = 0 \rightarrow n\mu_n^2 = p\mu_p^2$$

$$\Rightarrow \frac{p}{n} = \frac{\mu_n^2}{\mu_p^2} = \left(\frac{3.6}{1.6}\right)^2 = 5.06$$

$$\vec{J}_{TOT} = \vec{J}_n + \vec{J}_p = (nq\mu_n + pq\mu_p)\vec{E}$$

$$\Rightarrow \frac{J_p}{J_{TOT}} = \frac{p\mu_p}{n\mu_n + p\mu_p} = \frac{p/n}{p/n + \mu_n/\mu_p} =$$

$$= \frac{5.06}{5.06 + \frac{3.6}{1.5}} = 0.69 = 69\%$$

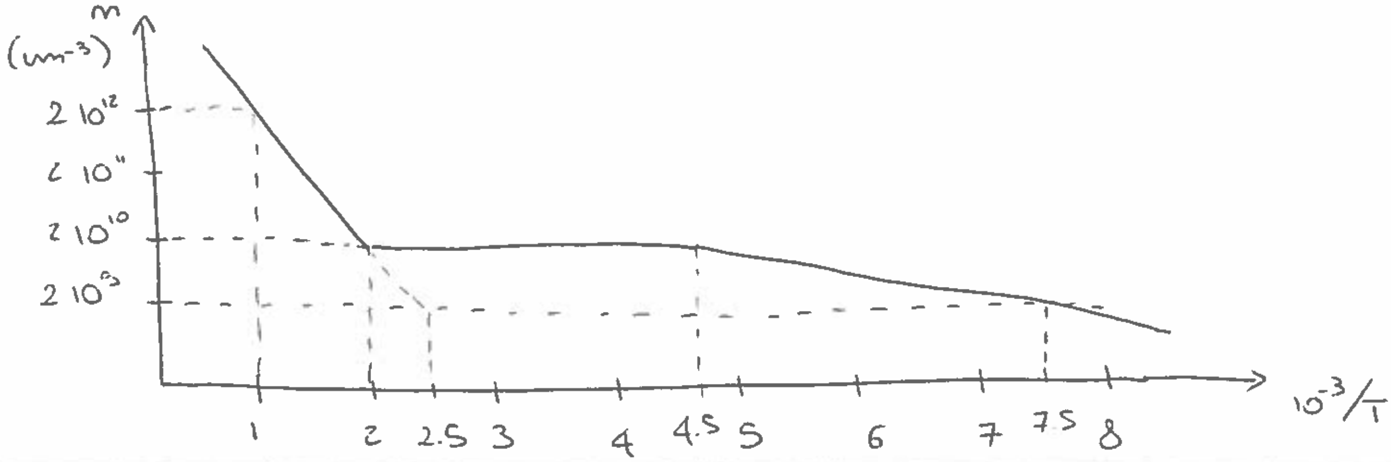
ESERCIZIO 6

In un semiconduttore puro di accettore la banda di conduzione è descritta dalla relazione:

$$E(\vec{k}) = E_g + A\left[\sin^2(ak_x) + \sin^2(ak_y) + \sin^2(ak_z)\right]$$

con $a = 0.3\ nm$ e $A = 5\ eV$.

La densità di elettroni n è riportata in figura in scala semilogaritmica verso $1/T$ e il tempo medio τ tra due urti è $\tau = 10^{13}$ s.



a) Commentare il grafico

b) Trovare l'energia della gap, E_g

c) Dimostrare che a $T = 400\ K$ $n \gg p$

d) Trovare la conducibilità σ e il cammino libero medio degli elettroni a $T = 400K$.

Soluzione

a)

La doppia pendenza indica che il semiconduttore è drogato. Il drogaggio è di tipo n (donatori).

1) Nel regime a bassa T

$$\frac{1000}{T_1} \simeq 4.5 \qquad T_1 \sim 220K$$

per $T < T_1$ tutti i livelli donori sono occupati

$$n(T) = \sqrt{N_c(T)\ \frac{N_d}{2}}\ e^{-E_d/2K_BT}$$

E_d è l'energia di ionizzazione del livello donore

$\mu(T)$ si trova tra E_d ed E_c (livello donore e livello banda di conduzione)

2) Nel regime intermedio tra T_1 e $\frac{1000}{T_2} \sim 2 \Rightarrow T_2 = 500K$

quasi tutti i donori sono ionizzati

Quindi $n(T) = N_d = 2\ 10^{10}\ cm^{-3}$
↳ concentrazione di donori

$p \ll n$

3) Nel regime ad alte temperature $T > 500K$

siamo nel regime intrinseco

$$n(T) = p(T) = n_i(T)$$

$$n_i(T) \sim T^{3/2}\ e^{-E_G/2K_BT}$$

a T alte domina l'esponenziale

$$\Rightarrow n_i(T) \propto \exp\left[-\frac{E_G}{2K_BT}\right]$$

, E_G = energia della gap

b) L'energia della gap, E_g la ricaviamo dal regime ad alte T, dal rapporto di n a due temperature T_A e T_B 21

$$\frac{1000}{T_A} = 1 \qquad \frac{1000}{T_B} = 2$$

$$\frac{2\,10^{12}}{2\,10^{10}} = \frac{n(T_A)}{n(T_B)} = + \exp\left[-\frac{E_G}{2K_B}\left(\frac{1}{T_A} - \frac{1}{T_B}\right)\right]$$

$$\ln 10^2 = \frac{E_G}{2K_B} 10^{-3}\ K^{-1}$$

$$\Rightarrow \quad E_G = 2\cdot 10^3\ K_B\ \ln(10^2)\ K = 9210\ K_B\cdot K = 0.792\,eV$$

c) A 400 K $\left(\frac{1000}{T} = 2.5\right)$ siamo in regione intermedia per cui $n(T) = N_d = 2\ 10^{10}\ cm^{-3}$.

Il corrispondente valore a 400 K della densità di portatori intrinseci $n_i(T)$ lo possiamo trovare dall'estrapolazione del grafico ad alte T fino a $\frac{1000}{T} = 2.5$

$$n_i(400\,K) = 2\ 10^9\ cm^{-3}$$

La densità dei minoritari (lacune) la otteniamo dalla mass-action law:

$$n(T)\,p(T) = n_i^2(T)$$

$$\Rightarrow \quad p(400K) = \frac{n_i^2(400K)}{n(400K)} = \frac{(2\cdot 10^9)^2}{2\cdot 10^{10}} \, cm^{-3} = 2\,10^8\, cm^{-3}$$

22

per cui $p \ll n$ due ordini di grandezza.

d) A 400 K $p \ll n$ $\Rightarrow$ la conducibilità è data solo dagli elettroni:

$$\sigma = \frac{ne^2 \tau_e}{m_e^*} \qquad n = 2\ 10^{10}\, cm^{-3}$$

L'unica incognita è la massa efficace degli elettroni in banda di conduzione, che ci aspettiamo stare nel minimo della banda, data la bassa densità, e ci ricaviamo dalla derivata seconda di $\mathcal{E}(\vec{k})$

$$m_e^* = \hbar^2 \left[\frac{\partial^2 \mathcal{E}(k)}{\partial k^2}\right]^{-1}$$

vicino al minimo della banda su $x \sim x$

$$\Rightarrow \mathcal{E}(\vec{k}) \cong \mathcal{E}_g + A a^2 (k_x^2 + k_y^2 + k_z^2) = \mathcal{E}_g + A a^2 k^2$$

$$\frac{\partial^2 \mathcal{E}(k)}{\partial k} = 2Aa^2$$

$$m^* = \frac{\hbar^2}{2Aa^2} = 7.72 \cdot 10^{-32}\, Kg = 0.085\, m_e \quad \left(m_e = 9.11 \cdot 10^{-31}\, Kg\right)$$

$$\Rightarrow \sigma(400K) = 0.66 \cdot 10^{-3}\, \Omega^{-1} m^{-1}$$

Il cammino libero medio λ è dato dalla velocità termica per il tempo medio tra 2 urti: $\lambda = v_e \tau_e$

$v_e \simeq v_T = \sqrt{\frac{3K_BT}{m_e^*}}$ (da equipartizione dell'energia $\frac{1}{2} m_e^* v_T^2 = \frac{3}{2} K_B T$) $\Rightarrow \lambda = 4.63 \cdot 10^{-8}\, m$

ESERCIZIO 7

a) Stimare la resistività di un semiconduttore intrinseco a $T = 290K$ sapendo che

$E_g = 1.4 eV$; $N_C = 4 \cdot 10^{23} m^{-3}$, $N_V = 8.1 \cdot 10^{24} m^{-3}$

$\mu_e = 8500 \, cm^2 V^{-1} s^{-1}$, $\mu_p = 400 \, cm^3 V^{-1} s^{-1}$, $\rho = \frac{1}{\sigma}$

b) Se il semiconduttore è drogato n, con concentrazione di impurezze $N_d = 10^{14} \, cm^{-3}$ ed energia di ionizzazione delle impurezze $E_d = 0.01 \, meV$ tale che tutte le impurezze sono ionizzate a $T = 290K$ si chiede di:

b1) scrivere l'equazione di neutralità di carica

b2) determinare la posizione del potenziale chimico, sapendo che per un semiconduttore di tipo n, in approssimazione di non degenerazione, $n = N_C \, e^{\frac{\mu - E_C}{K_B T}}$, e valutare se a $T = 290K$ vale l'approssimazione di non degenerazione.

b3) Calcolare il nuovo valore della resistività, assumendo che la mobilità dei portatori non sia cambiata. Determinare prima se il comportamento è intrinseco o estrinseco.

b4) Tracciare un grafico approssimato di $\ln n(T)$ vs $1/K_B T$ per il semiconduttore drogato, specificando le pendenze e la temperatura che segna il passaggio da alte T a T intermedie.

Soluzione

a) FORMULE NECESSARIE

$\sigma = neμ_e + pqμ_p$ → $μ_e, μ_p$ mobilità di elettroni e lacune

$n(T) = p(T) = n_i(T)$ → semiconduttore intrinseco

$$n_i(T) = \sqrt{N_C N_V} \exp\left[-\frac{E_g}{2K_BT}\right]$$

Dai dati del problema ricavo:

$$n_i(T=290K) = \sqrt{4 \cdot 10^{23} m^{-3} \cdot 8.1 \cdot 10^{24} m^{-3}} \exp\left[-\frac{1.4eV}{2K_B \cdot 290K}\right] =$$

$$= 1.16 \cdot 10^{12} m^{-3}$$

$$\sigma(T) = n_i(T) \cdot e \left[μ_e(T) + μ_p(T)\right]$$

$$\rho = \frac{1}{\sigma(T=290K)} = \frac{1}{n_i(290K) \cdot e} \quad \frac{1}{μ_e(290K) + μ_p(290K)} =$$

$$= \frac{1}{1.16 \; 10^{12} m^{-3} \cdot 1,6 \cdot 10^{-19} C} \quad \frac{1}{(8500 + 400) \; cm^2 V^{-1} s^{-1}} = 6.05 \cdot 10^{6} \; \Omega m$$

b) A $T = 290K$ gli stati donatori sono assunti essere completamente ionizzati ⇒

$$n(T) = p(T) + N_d^+(T) = p(T) + N_d$$

$N_d^+(T)$ ↓ densità donori ionizzati a T

N_d ↘ densità impurezze nel semiconduttore b2) A $T = 290K$

$n_i(290K) = 1.16 \quad 10^{12} m^{-3}$

$N_d^+(290K) = N_d = 10^{14} cm^{-3} = 10^{20} m^{-3}$

$\Rightarrow \quad n \simeq N_d$

Oppure stimiamo $n(T)$ esattamente usando la legge d'azione di massa

$$n_i^2(T) = n(T)\, p(T)$$

Moltiplichiamo l'equazione di neutralità di carica per $n(T)$ e otteniamo

$$n^2(T) = \underbrace{n(T)\, p(T)}_{n_i^2(T)} + N_d\, n(T)$$

$$n^2(T) = n_i^2(T) + N_d\, n(T)$$

$$n^2(T) - N_d\, n(T) - n_i^2(T) = 0$$

$$\Rightarrow \quad n(T) = \frac{N_d \pm \sqrt{N_d^2 + 4 n_i^2(T)}}{2} \simeq N_d$$

Siamo in regime intermedio $\Rightarrow$

$$n(T) = N_c(T)\, e^{\frac{\mu - \varepsilon_c}{K_B T}} \quad \text{con} \quad n(T) \simeq N_d$$

$$\Rightarrow \quad \varepsilon_c - \mu = K_B T \ln \frac{N_c}{N_d} = 0.207 \text{ eV}$$

Ipotesi di non degenerazione: $\varepsilon_c - \mu \gg K_B T$

$$\left.\frac{\varepsilon_c - \mu}{K_B T}\right|_{290K} = \ln \frac{N_c}{N_d} = 8.3 \quad \Rightarrow \quad \frac{\varepsilon_c - \mu}{K_B T} \gg 1$$

quindi l'ipotesi è giustificata.

b3) A $T = 290\,K$ $n \simeq N_d$ quindi siamo in regime estrinseco. 26

Per drogaggio di tipo n in regime estrinseco $p \ll n$

↳ verifichiamolo usando la legge d'azione di massa

$$p(T) = \frac{n_i^2(T)}{n(T) \simeq N_d} =$$

$$= \frac{(1.16\ 10^{12} m^{-3})^2}{10^{20} m^{-3}} = 1.3 \cdot 10^4 m^{-3} \ll n(T)$$

⇒ nel calcolo della conducibilità trascuriamo i portatori di tipo p

$$\sigma = n e \mu_e = N_d \cdot e \cdot \mu_e$$

$$\rho = \frac{1}{\sigma} = 7.35 \cdot 10^{-2}\,\Omega m$$

---

b4) Ad alte T ⇒ comportamento intrinseco

$$n(T) = n_i(T) \propto e^{-\frac{E_G}{2K_BT}}$$ Trascuro $T^{3/2}$ ad alte T

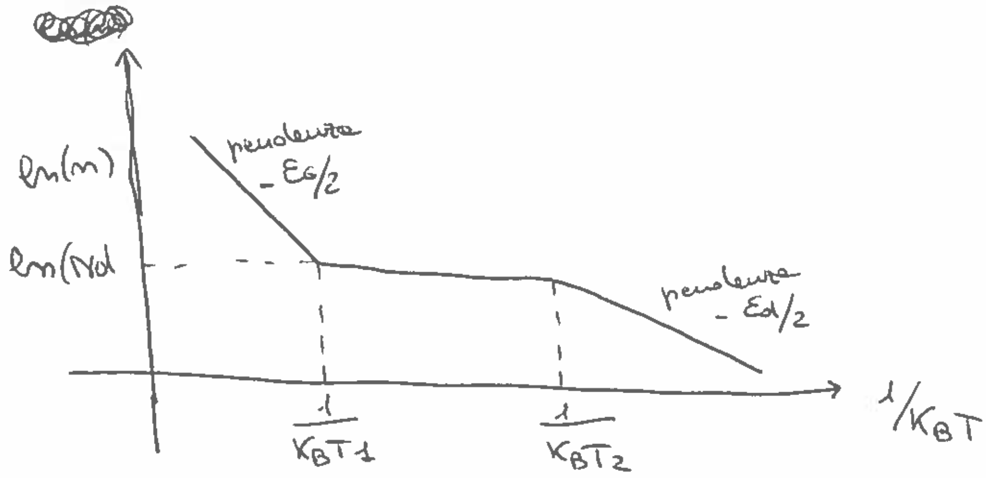
$$\Rightarrow \ln n(T) \propto -\frac{E_G}{2}\frac{1}{K_BT}$$

A T intermedie $n(T) \simeq N_d$ plateau

A basse T → comportamento estrinseco

$$n(T) = N_c\, e^{-E_d/2K_BT}$$

$$\Rightarrow \ln n(T) \propto -\frac{E_d}{2}\, K_BT$$



T_1 = passaggio da alte T a T intermedie

T_2 = passaggio da basse T a T intermedie

I due andamenti $n(T) = n_i(T)$ e

$n(T) = N_d$

devono incontrarsi a T_1

$$\Rightarrow \quad n(T_1) = N_d$$

$$\sqrt{N_c N_v} \exp\left[-\frac{E_g}{2K_BT_1}\right] = N_d$$

$$+\frac{E_g}{2K_BT_1} = -\ln\frac{N_d}{\sqrt{N_cN_v}} = +\ln\frac{\sqrt{N_cN_v}}{N_d}$$

$$T_1 = \frac{E_G}{2K_B}\left(\ln\frac{\sqrt{N_cN_v}}{N_d}\right)^{-1} \approx 830K$$

A $T = T_2$ si incontrano $n(T) = N_d$ e

$$n(T) = \sqrt{\frac{N_c N_D}{2}} \exp\left[-\frac{E_c - E_d}{2K_BT}\right]$$

Esercizio 11

In un semiconduttore intrinseco la densità degli elettroni di conduzione n a 300 K è:

$$n = N_C e^{(\mu - E_g)/K_B T}$$

dove $E_g = 0.5$ eV, $N_C = 10^{19}$ m^{-3} e il potenziale chimico μ coincide con l'energia di Fermi a T = 0 K. I portatori dei due segni, elettroni in banda di conduzione e lacune in banda di valenza, hanno la stessa massa efficace. Inoltre le misure di trasporto forniscono a 300 K una conducibilità elettrica $\sigma = 1.5 \cdot 10^{-3}$ Ω^{-1}m^{-1} e una costante di Hall R$_H$ che, nel SI, vale:

$$R_H = \frac{1}{e} \frac{p\mu_p^2 - n\mu_n^2}{(p\mu_p + n\mu_n)^2} = 2 \cdot 10^3 \text{m}^{-3}/\text{C}$$

1. Si ricavino le mobilità delle buche e degli elettroni μ_b e μ_e.
2. Sapendo che la banda di conduzione ha la forma: $E(k) = \frac{10\hbar^2 k^2}{m_0}$, si trovino i tempi medi di scattering τ_b e τ_e.

Costanti e formule utili

$\hbar = 1.054 \cdot 10^{-27}$ erg·s
$e = 1.6 \cdot 10^{-19}$ C
$m_0 = 9.1 \cdot 10^{-31}$ kg
1 eV = $1.6 \cdot 10^{-12}$ erg
1 eV/ K$_B$ = 11605 K

Soluzione

1. Se il semiconduttore è intrinseco si ha $n = p = n_i$, inoltre se le masse efficaci dei portatori sono uguali, allora il potenziale chimico si trova a metà gap $\mu = E_g/2$. Per cui a 300 K:

$$n_i = n = p = N_C exp(-E_g/2K_B T) = 10^{19} exp(-0.5 \cdot 11605/2 \cdot 300) = 6.31 \cdot 10^{14} \text{ m}^{-3}$$

Conducibilità e costante di Hall nel caso di un semiconduttore intrinseco possono essere riscritte come:

$$\sigma = pe\mu_p + ne\mu_n = n_i e(\mu_p + \mu_n)$$
$$R_H = \frac{1}{e} \frac{p\mu_p^2 - n\mu_n^2}{(p\mu_p + n\mu_n)^2} = \frac{1}{n_i e} \frac{\mu_p - \mu_n}{\mu_p + \mu_n}$$

Mettendole a sistema si ottiene:

$$\mu_p + \mu_n = \frac{\sigma}{n_i e}$$
$$\mu_p - \mu_n = \sigma R_H$$

dalle quali otteniamo le mobilità dei due portatori:

$$\mu_p = \frac{\sigma}{2}\left(\frac{1}{n_i e} + R_H\right) = 1.186\ \mathrm{m^2V^{-1}s^{-1}}$$
$$\mu_n = \frac{\sigma}{2}\left(\frac{1}{n_i e} - R_H\right) = 0.786\ \mathrm{m^2V^{-1}s^{-1}}$$

2. La massa efficace dell'elettrone si trova derivando due volte la banda di conduzione, inoltre sappiamo che le masse dei portatori sono uguali, per cui:

$$m_e^* = m_p^* = \hbar^2 \left(\frac{\partial^2 E_C}{\partial k^2}\right) = \frac{m_0}{20} = 0.455 \cdot 10^{-31}\ \mathrm{kg}$$

conoscendo le mobilità troviamo i tempi di scattering:

$$\tau_p = \frac{\mu_p m_p^*}{e} = 3.37\ \mathrm{s}$$
$$\tau_n = \frac{\mu_n m_n^*}{e} = 2.23\ \mathrm{s}$$

Esercizio 12 - Simulazione prova di esonero AA 2014/2015

Un semiconduttore viene drogato con atomi accettori in concentrazione $N_A = 6.4 \cdot 10^{19}$ m^{-3} ed energia di legame ϵ_a. A T = 10 K le lacune hanno un tempo medio di scattering $\tau_h = 1.2 \cdot 10^{-12}$ s e una mobilità $\mu_h = 0.75$ m^2/Vs. La costante di Hall alla stessa temperatura vale $R_H = 28$ m^3/C. Le masse efficaci di elettroni e lacune sono uguali ed indipendenti dalla temperatura.

1. Determinare ϵ_a e la conducibilità elettrica a T = 10 K sapendo che $\epsilon_g = 25\epsilon_a$, dove ϵ_g è l'energia di gap.

2. Determinare la conducibilità elettrica a T = 300 K sapendo che a questa temperatura $\tau_h = \tau_e/3 = 0.5 \cdot 10^{-13}$ s.

3. Considerate un semiconduttore intrinseco. Quale tipo di drogaggio si ottiene a temperatura ambiente inserendo nel semiconduttore un'impurezza ogni 100 atomi del semiconduttore? Quest'ultimo cristallizza in una struttura fcc di costante reticolare a=5.65 Å.

Costanti e formule utili

$\hbar = 1.054 \cdot 10^{-34}$ J·s $= 6.583 \cdot 10^{-16}$ eV·s
$K_B = 1.38 \cdot 10^{-23}$J · K^{-1} $= 1.38 \cdot 10^{-16}$ erg/K $= 8.62 \cdot 10^{-5}$ eV/K
$e = 1.6 \cdot 10^{-19}$ C
$m_0 = 9.1 \cdot 10^{-31}$ kg
1 eV = 11605 K
$k_F = \left(3\pi^2 \frac{N}{V}\right)^{\frac{1}{3}}$

Soluzione

1. A 10 K si ha:

$$p(10\text{K}) = \frac{1}{qR_H(10\text{K})} = 2.23 \cdot 10^{17} \text{ m}^{-3}$$
$$\sigma(10\text{K}) = qp\mu_h = \frac{\mu_h}{R_H(10\text{K})} = 2.7 \cdot 10^{-2}\text{m}^{-1}\Omega^{-1}$$

Inoltre vale:

$$p(T) = \sqrt{\frac{N_V(T)N_A}{2}} \exp\left(-\frac{\epsilon_a}{2K_BT}\right) \quad \text{con} \quad N_V(T) = \frac{1}{4}\left(\frac{2m_V^* K_B T}{\pi\hbar^2}\right)^{3/2}$$

invertendola si trova l'energia di legame degli accettori:

$$\epsilon_a = -2K_BTln\left(p(T)\sqrt{\frac{2}{N_V(T)N_A}}\right)$$

la massa m_V^* che compare in $N_V(T)$ la prendiamo dalla mobilità a 10 K:

$$m_V^* = \frac{q\tau_h}{\mu_h} = 2.56 \cdot 10^{-31} \text{ Kg} \quad \Longrightarrow \quad N_V(10\text{K}) = 2.28 \cdot 10^{22} \text{ m}^{-3}$$

Ora abbiamo tutti i dati per trovare ϵ_a:

$$\epsilon_a = -2K_B(10\text{K})ln\left(p(10\text{K})\sqrt{\frac{2}{N_V(10\text{K})N_A}}\right) = 165K_BK = 14.2 \text{ meV}$$

2. a 300 K dobbiamo controllare la densità di portatori intrinseci per capire in quale regime siamo:

$$p_i(T) = \sqrt{N_C(T)N_V(T)}\exp\left(-\frac{\epsilon_g}{2K_BT}\right) = \sqrt{N_C(T)N_V(T)}\exp\left(-\frac{25\epsilon_a}{2K_BT}\right)$$

Inoltre, dato che le masse sono uguali e indipendenti dalla temperatura si ha che:

$$\frac{N_V(T_1)}{N_V(T_2)} = \frac{N_C(T_1)}{N_V(T_2)} = \left(\frac{T_1}{T_2}\right)^{3/2}$$

Con $T_1 = 300$ K e $T_2 = 10$ K otteniamo:

$$p_i(300\text{K}) = N_V(10\text{K})\left(\frac{300}{10}\right)^{3/2}\exp\left(-\frac{4125}{600}\right) = 3.87 \cdot 10^{21} \text{ m}^{-3}$$

poichè $p_i >> N_A$ siamo in regime intrinseco per cui:

$$\sigma(300\text{K}) = qp_i(\mu_h + \mu_e) = \frac{q^2}{m^*}p_i(\tau_h + \tau_e) = \frac{4q^2}{m^*}p_i\tau_h = 77.4 \text{ m}^{-1}\Omega^{-1}$$

3. Il drogaggio cercato (di tipo n o p non ci interessa ora) è 1/100 della densità atomica del solido:

$$N_{drog} = \frac{N}{V}\frac{1}{100} = \frac{4}{a^3}\frac{1}{100} = 2.22 \cdot 10^{26} \text{ m}^{-3}$$

Esercizio 13 - Es. 4 Appello I AA 2014/2015

Un semiconduttore viene drogato con atomi donori in concentrazione N_D. Una misura a diverse temperature della costante di Hall nel sistema ha dato i seguenti risultati: a 800 K è nulla mentre nell'intervallo di temperature (220-260) K essa risulta in ottima approssimazione costante e pari a -0.189 $C^{-1}m^3$. Inoltre è noto che la temperatura di cross-over tra il regime ad alte temperature e il regime a temperature intermedie è T^*=300 K; che la transizione di Mott avviene ad una concentrazione di impurezze pari a $N_{\mathrm{Mott}} = 3.73 \cdot 10^{24}\ \mathrm{m}^{-3}$; che le masse di lacune ed elettroni sono uguali fra loro e pari alla massa dell'elettrone m_0. Le mobilità e le masse dei portatori non dipendono dalla temperatura. La mobilità degli elettroni vale $\mu_e = 50\ \mathrm{cm}^2/\mathrm{Vs}$. La costante dielettrica relativa del materiale è $\epsilon_r = 14$. Determinare:

1. La concentrazione del drogaggio N_D.

2. L'energia di legame dell'impurezza nel modello idrogenoide.

3. L'energia di gap supposta indipendente dalla temperatura.

4. La conducibilità a 800 K.

S ricordano le seguenti formule:

- Energia di legame e raggio dell'orbita nel modello idrogenoide

$$\epsilon_n = \frac{m_e^*}{m_0}\frac{1}{\epsilon_r^2}\frac{1}{n^2}\mathrm{Ry}\ ; \quad a_n = \frac{m_0}{m_e^*}\epsilon_r n^2 a_B$$

- La costante di Hall in presenza di due portatori (h lacune, e elettroni), nel sistema SI

$$R_H = \frac{1}{q}\frac{p\mu_h^2 - n\mu_e^2}{(p\mu_h + n\mu_e)^2}$$

Soluzione

1. La costante di Hall è costante tra 220 K e 160 K, quindi in questo intervallo la densità degli elettroni n è costante e pari al drogaggio N_D (regime intermedio):

$$R_H = -\frac{1}{qn} = -\frac{1}{qN_D} \quad \Longrightarrow \quad N_D = \frac{-1}{qR_H} = \frac{1}{1.6 \cdot 10^{-19} \cdot 0.189}\ \mathrm{m}^{-3} = 3.3 \cdot 10^{19}\ \mathrm{m}^{-3}$$

A queste temperature non si può essere in regime intrinseco perchè qui si avrebbe:

$$R_H = \frac{1}{qn_i}\frac{\mu_p - \mu_e}{\mu_p + \mu_e}$$

il testo ci dice che $\mu_p = \mu_e$ a tutte le temperature, per tanto nel regime intrinseco si deve avere sempre $R_H = 0$.
Inoltre non possiamo neanche essere nel regime a basse temperature perchè qui la densità dei maggioritari (n) dipende dalla temperatura e dunque necessariamente anche R_H.

2.

$$N_{\mathrm{Mott}} = \left(\frac{4}{3}\pi a_n^3\right)^{-1} \quad \Longrightarrow \quad a_n = \left(\frac{4}{3}\pi N_{\mathrm{Mott}}\right)^{-1/3} = 4\ \mathrm{nm}$$

Si ha: $\epsilon_n \ a_n = \frac{R_y a_B}{\epsilon_r}$, dalla quale possiamo trovare l'energia di legame cercata ($\epsilon_n = \epsilon_d$) :

$$\epsilon_d = \frac{R_y a_B}{\epsilon_r a_n} = \frac{13.6 \cdot 0.05}{14 \cdot 4} \text{ eV} = 0.012 \text{ eV}$$

3. A T* l'andamento a temperature intermedie ($n(T) = N_D$) deve incontrarsi con l'andamento ad alte temperature ($n(T) = n_i(T)$, $n_i(T)$ è la densità di portatori instrinseci), ovvero a T* deve valere $N_D = n_i(T^*)$:

$$N_D = \sqrt{N_C \ N_V} \ \exp\left[-\frac{E_g}{2K_B T^*}\right]$$

dove $N_{C,V} = 2.534 \left(\frac{m^*_{C,V}}{m_0} \frac{T}{300 \text{ K}}\right)^{3/2} \cdot 10^{25} \text{ m}^{-3}$ sono le densità degli stati della banda di conduzione/valenza (Grosso, pag. 477). Poichè si ha che $m^*_C = m^*_V = m_0$ ad ogni temperatura, le due densità sono uguali fra loro ad ogni temperatura. Calcoliamo l'energia della gap:

$$N_C(T^*) = 2.534 \cdot 10^{25} \text{ m}^{-3}$$
$$E_g = 2K_B T^* \ \ln\left(\frac{N_C(T^*)}{N_D}\right) = 600 \text{ K} \ \ln\left(\frac{2.534 \cdot 10^{25}}{3.3 \cdot 10^{19}}\right) = 8131 \cdot K_B \text{ K } = 0.7 \text{ eV}$$

4. A 800 K ($> T^*$) siamo in regime intrinseco, elettroni e lacune hanno dunque stessa concentrazione, pari a quella intrinseca ($n = p = n_i$), e, quanto detto prima anche stessa mobilità. . La conducibilità è pertanto:

$$\sigma(T) = q \ (n(T)\mu_e + p(T)\mu_h) = q \, n_i(T) \ (\mu_e + \mu_h) = 2 \, q \, n_i(T) \ \mu_e$$

A 800 K si ha pertanto:

$$n_i(800 \text{ K}) = 2.534 \left(\frac{800}{300}\right)^{3/2} \ \exp\left[-\frac{8131}{1600}\right] \cdot 10^{25} \text{ m}^{-3} = 6.85 \cdot 10^{23} \text{ m}^{-3}$$
$$\sigma(800 \text{ K}) = 2 \cdot 1.6 \cdot 10^{-19} \cdot 6.58 \cdot 10^{23} \cdot 50 \cdot 10^{-4} \text{ C m}^{-1}/\text{V s} = 1096 \text{ m}^{-1}\Omega^{-1}$$

Esercizio 14 - Es. 4 Appello II AA 2014/2015

Si consideri un semiconduttore drogato n alla temperatura di 4 K. La densità degli atomi donatori è $N_D = 10^{13}$ cm^{-3}, la massa degli elettroni di conduzione è $m_e^* = 0.3m_e$ e l'energia di ionizzazione degli atomi donatori è $\epsilon_d = 30$ meV. Calcolare:

1. La densità degli elettroni nella banda di conduzione;

2. Lo spostamento del potenziale chimico rispetto al minimo della banda di conduzione.

3. Il semiconduttore è degenere o non degenere?

4. Sapendo che in regime intrinseco le densità dei portatori sono $n_i(300\text{ K}) = 4.2{\cdot}10^{13}$ cm^{-3} e $n_i(350\text{ K}) = 6.8{\cdot}10^{14}$ cm^{-3}, trovare il valore della gap del semiconduttore. Eseguire questo calcolo con la massima precisione possibile.

Costanti utili:
K$_B = 1.38 \cdot 10^{-23}$ J/K $= 8.62 \cdot 10^{-5}$ eV/K ; $m_e = 9.11{\cdot}10^{-31}$ kg ; $\hbar = 1.054 \cdot 10^{-34}$ J s $= 6.583{\cdot}10^{-16}$ eV s

Soluzione

1. Nel regime a basse temperature la densità dei portatori maggioritari (di tipo n) è data da:

$$n(T) = \sqrt{\frac{N_C(T)N_D}{2}}\, e^{-\epsilon_d/2K_BT}$$

La densità della banda di conduzione ($N_C(T)$) a 4 K vale:

$$N_C(4\text{ K}) = 2.534\left(\frac{m_c^*}{m_0}\frac{4\text{ K}}{300\text{ K}}\right)^{3/2} \cdot 10^{19}\text{ cm}^{-3} = 2.534\left(0.3\frac{4}{300}\right)^{3/2} \cdot 10^{19}\text{ cm}^{-3} = 6.4 \cdot 10^{15}\text{ cm}^{-3}$$

mentre $K_BT|_{4\text{ K}} = 3.448 \cdot 10^{-4}$ eV, risulta quindi:

$$n(4\text{ K}) = \sqrt{\frac{6.4 \cdot 10^{15} \cdot 10^{13}}{2}}\, e^{-30/2\cdot 0.3448}\text{ cm}^{-3} = 2.3 \cdot 10^{-5}\text{ cm}^{-3}$$

2. Il potenziale chimico si può trovare dalla relazione generale degli elettroni in banda di conduzione $n(T) = N_C(T)e^{(\mu-E_C)/K_BT}$. Invertendola si trova:

$$\mu(T) - E_C = K_BT\ln\left[\frac{n(T)}{N_C(T)}\right]$$

Che a 4 K fornisce il valore:

$$\mu(4\text{ K}) - E_C = K_B(4\text{ K})\ln\left[\frac{n(4\text{ K})}{N_C(4\text{ K})}\right] = -1.6 \cdot 10^{-2}\text{ eV} = -16\text{ meV}$$

3. A 4 K il potenziale chimico è 16 meV sotto il minimo della banda di conduzione, il semiconduttore è non degenere. Infatti a T= 4 K si ha che $K_BT << E_C - \mu$.

4. In regime intrinseco, la densità degli elettroni $n_i(T)$ dipende dalla temperatura come:

$$n_i(T) \sim T^{3/2}e^{-E_g/2K_BT}$$

Calcoliamo il rapporto $n_i(350\text{ K})/n_i(300\text{ K})$:

$$\frac{n_i(350\text{ K})}{n_i(300\text{ K})} = \left(\frac{350}{300}\right)^{3/2} \exp\left[-\frac{E_g}{2K_B}\left(\frac{1}{350\text{ K}} - \frac{1}{300\text{ K}}\right)\right]$$

Invertendo questa relazione si trova l'energia di gap E_g:

$$\begin{aligned}
E_g &= -2K_B \ln\left[\frac{n_i(350\text{ K})}{n_i(300\text{ K})}\left(\frac{350}{300}\right)^{-3/2}\right]\left(\frac{1}{350\text{ K}} - \frac{1}{300\text{ K}}\right)^{-1} = \\
&= -2(8.62\cdot 10^{-5})\ln\left[\frac{6.8\cdot 10^{14}}{4.2\cdot 10^{13}}\left(\frac{350}{300}\right)^{-3/2}\right]\left(\frac{1}{350} - \frac{1}{300}\right)^{-1}\text{ eV} = \\
&= 0.92\text{ eV}
\end{aligned}$$

Esercizio 15 - Es. 4 Appello I AA 2015/2016

Un semiconduttore viene drogato con atomi donori in concentrazione $N_D = 5.2 \cdot 10^{19}$ m^{-3}.
La temperatura che segna il crossover tra il regime ad alte temperature ed il regime a temperature intermedie è $T_1 = 300$ K, mentre la temperatura che segna il crossover tra il regime a temperature intermedie ed il regime a basse temperature è $T_2 = 110$ K.
La mobilità degli elettroni μ_e, la mobilità delle lacune μ_p e le masse efficaci m_e^*, m_p^* dei portatori non dipendono dalla temperatura.
É inoltre noto che $\mu_e = 1.2$ m^{2}V^{-1}s^{-1} e $\mu_p = 0.8$ m^{2}V^{-1}s^{-1}; che le masse efficaci dei portatori sono uguali fra loro ($m_e^* = m_p^*$); che a T = 600 K la densità degli stati in banda di conduzione vale $N_\mathrm{C}(600\mathrm{K}) = 4.0 \cdot 10^{24}$ m^{-3}.
Determinare:

1. La conducibilità elettrica a T = 450 K.

2. La conducibilità elettrica a T = 100 K.

3. La conducibilità elettrica a T = 200 K.

4. Il contributo dei portatori minoritari alla conducibilità elettrica a T = 200 K.

Valori delle costanti:

$e = 1.6 \cdot 10^{-19}$ C
$m_0 = 9.11 \cdot 10^{-31}$ Kg
$K_B = 1.38 \cdot 10^{-23}$ J/K $= 8.62 \cdot 10^{-5}$ eV/K
$\hbar = 1.054 \cdot 10^{-34}$ J s $= 6.583 \cdot 10^{-16}$ e Vs

Soluzione esercizio 4

Poichè le masse efficaci dei portatori sono indipendenti dalla temperatura e uguali fra loro, le densità degli stati in banda di conduzione e di valenza sono uguali ad ogni temperatura: $N_C(T) = N_V(T)$.
Inoltre possiamo sempre scrivere $N_C(T)$ in funzione di un suo valore noto (nel nostro caso facciamo riferimento al dato a 600 K), per cui per il nostro semiconduttore valgono le seguenti relazioni:

$$n_i(T) = \sqrt{N_C(T)N_V(T)}\, e^{-E_g/(2K_BT)} = N_C(T)\, e^{-E_g/(2K_BT)}$$
$$N_C(T) = N_C(600)\left(\frac{T}{600}\right)^{3/2}$$

1. T = 450 K $> T_1$, quindi si è in regime intrinseco e valgono:

$$\sigma(T) = n_i(T)e(\mu_e + \mu_p)$$
$$n_i(T) = N_C(600)\left(\frac{T}{600}\right)^{3/2} e^{-E_g/(2K_BT)}$$

L'energia della gap si ricava uguagliando il drogaggio alla densità dei portatori intrinseci a T_1:

$$N_D = n_i(T_1) = N_C(600)\left(\frac{T_1}{600}\right)^{3/2} e^{-E_g/(2K_BT_1)}$$

$$\frac{E_g}{2K_B} = T_1 \ln\left(\frac{N_C(600)}{N_D}\left(\frac{T_1}{600}\right)^{3/2}\right) = (300)\text{K}\ \ln\left(\frac{4\cdot 10^{24}}{5.2\cdot 10^{19}}\left(\frac{1}{2}\right)^{3/2}\right) = 3063.25\ \text{K}$$

Densità dei portatori intrinseci e conducibilità a 450 K sono dunque:

$$n_i(450) = N_C(600)\left(\frac{450}{600}\right)^{3/2} e^{-3063.25\cdot(450^{-1})} = 2.87\cdot 10^{21}\ \text{m}^{-3}$$

$$\sigma(450) = n_i(450)e(\mu_e+\mu_p) = 2.87\cdot 10^{21}\ \text{m}^{-3}\cdot 1.6\cdot 10^{-19}\ \text{C}\cdot 2\ \text{m}^2\text{V}^{-1}\text{s}^{-1} = 9.2\cdot 10^{2}\ \text{m}^{-1}\Omega^{-1}$$

2. T=100 K $< T_2$, quindi si è in regime di basse temperature ($p << n$) e valgono:

$$\sigma(T) = n(T)e\mu_e$$

$$n(T) = \sqrt{\frac{N_C(T)N_D}{2}}\, e^{-\epsilon_D/(2K_BT)}$$

L'energia del livello donore si ricava uguagliando il drogaggio alla densità degli elettroni a T_2:

$$N_D = n(T_2) = \sqrt{\frac{N_C(T_2)N_D}{2}}\, e^{-\epsilon_D/(2K_BT_2)} = \sqrt{\frac{\left(\frac{T_2}{600}\right)^{3/2} N_C(600)N_D}{2}}\, e^{-\epsilon_D/(2K_BT_2)}$$

$$\epsilon_D/K_B = T_2 \ln\left(\frac{N_C(600)}{2N_D}\left(\frac{T_2}{600}\right)^{3/2}\right) = (110)\text{K}\ \ln\left(\frac{4\cdot 10^{24}}{10.4\cdot 10^{19}}\left(\frac{110}{600}\right)^{3/2}\right) = 881.4\text{K}$$

Densità degli elettroni e conducibilità a 100 K sono dunque:

$$n(100) = \sqrt{\frac{N_C(100)N_D}{2}}\, e^{-\epsilon_D/(2K_B(100\ \text{K})} = \sqrt{\frac{N_C(600)\left(\frac{100}{600}\right)^{3/2} N_D}{2}}\, e^{-\epsilon_D/(2K_B(100\ \text{K})} = 3.25\cdot 10^{19}\ \text{m}^{-3}$$

$$\sigma(100) = n(100)e\mu_e = 3.25\cdot 10^{19}\ \text{m}^{-3}\cdot 1.6\cdot 10^{-19}\ \text{C}\cdot 1.2\ \text{m}^2\text{V}^{-1}\text{s}^{-1} = 6.24\ \text{m}^{-1}\Omega^{-1}$$

3. A T = 200 K ($T_1 < T < T_2$) si è in regime intermedio, per cui $n \sim N_D$ e $p << n$:

$$\sigma(200) = N_De\mu_e = 5.2\cdot 10^{19}\ \text{m}^{-3}\cdot 1.6\cdot 10^{-19}\ \text{C}\cdot 1.2\ \text{m}^2\text{V}^{-1}\text{s}^{-1} = 9.98\ \text{m}^{-1}\Omega^{-1}$$

4. A T = 200 K i minoritari (lacune) hanno densità e conducibilità elettrica:

$$p = \frac{n_i^2(200)}{n} = \frac{n_i^2(200)}{N_D} = \frac{\left(\frac{200}{600}\right)^3 N_C^2(600)\exp\{-E_g/(K_B\cdot 200)\}}{N_D} = 5.67\cdot 10^{14}\ \text{m}^{-3}$$

$$\sigma_p(200) = p(200)e\mu_p = 7.3\cdot 10^{-5}\ \text{m}^{-1}\Omega^{-1}$$

il contributo è dunque cinque ordini di grandezza minore di quello dei maggioritari.