Secondo scritto- 8 Febbraio 2022

Esercizio 1

Nello spazio è presente una distribuzione di carica elettrica a simmetria sferica descritta da una densità $\rho(r)$ data da (figura 1):

$$\rho(r) = \begin{cases} kr & 0 \leq r \leq R \\ -\rho_1 & R < r \leq 2R \\ \rho_2 & 2R < r \leq 3R \\ 0 & r > 3R \end{cases}$$

con $R = 0.1\,\mathrm{m}$, $k = 50\,\mathrm{C/m^4}$ e $\rho_1 = 0.75\,\mathrm{C/m^3}$.

- Determinare il valore di ρ_2 affinchè la carica elettrica totale sia nulla (**3 punti**).
- Determinare il campo elettrico in tutto lo spazio (**4 punti**).
- Calcolare il lavoro necessario a portare una carica $q_0 = 1\,\mu\mathrm{C}$ da $r = \infty$ a $r = 0$ (**4 punti**).

Costante dielettrica del vuoto: $\epsilon_0 = 8.854 \times 10^{-12}\mathrm{F\,m^{-1}}$.

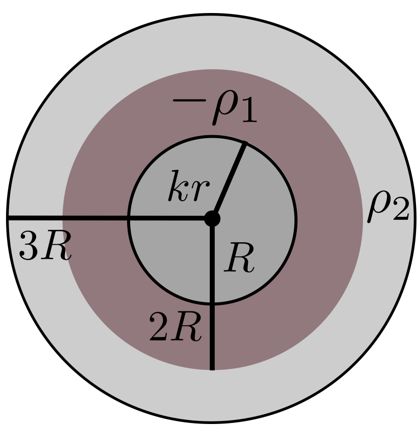

Figura 1

Esercizio 2

In un piano xy si trovano un filo conduttore rettilineo ed infinito percorso da una corrente costante $i = 20\,\mathrm{A}$, ed una spira rettangolare di lati $L = 20\,\mathrm{cm}$ e $h = 1\,\mathrm{m}$ e resistenza $R = 0.1\,\Omega$, come mostrato in figura 2. La spira è sottoposta ad un moto armonico. La coordinata x del suo centro O al tempo t è data da:

$$x(t) = d + A \sin \omega t \ ,$$

avendo preso l'origine dell'asse x coincidente con la posizione del filo conduttore.

- Determinare il flusso del campo magnetico $\phi_B(t)$ concatenato alla spira al tempo t (**4 punti**).
- Calcolare la potenza dissipata dalla resistenza R al tempo $t = 0$ (**4 punti**).
- Calcolare il modulo F della forza esercitata dal campo magnetico generato dal filo conduttore sulla spira, al tempo $t = 0$ (**3 punti**).

[$d = 50\,\mathrm{cm},\ A = 10\,\mathrm{cm},\ \omega = 2 \times 10^3\ \mathrm{rad\,s^{-1}}$]

Permeabilità magnetica del vuoto: $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\mathrm{H\,m^{-1}}$.

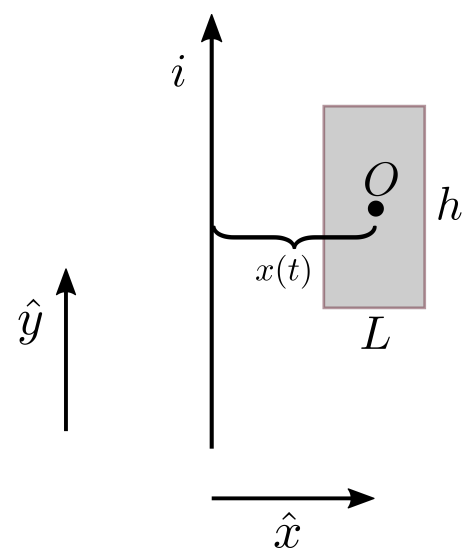

Figura 2

Esercizio 3

Una sbarretta conduttrice di lunghezza $L = 20\,\mathrm{cm}$ e massa $m = 50\,\mathrm{g}$, si muove senza attrito lungo due binari conduttori, formando un circuito chiuso con resistenza complessiva $R = 0.2\,\Omega$. Come indicato in figura 3, la sbarretta si muove inizialmente verso destra con una velocità $v_0 = 200\,\mathrm{m\,s^{-1}}$. Per rallentare la sbarretta si decide di accendere per un secondo, un campo magnetico $\vec{B}$ perpendicolare al piano del foglio e con verso uscente, di modulo costante $|\vec{B}| = 1\,\mathrm{T}$.

- Determinare l'equazione differenziale che regola l'accelerazione della sbarretta quando il campo magnetico è acceso (**3 punti**).
- Calcolare la velocità finale della sbarretta (**4 punti**).
- Determinare l'energia totale dissipata dalla resistenza R per effetto Joule (**4 punti**).

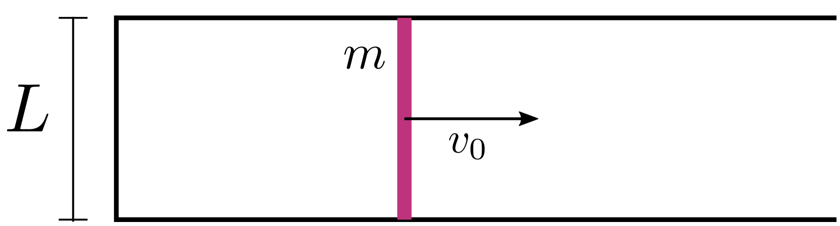

Figura 3

Soluzione Esercizio 1

Le cariche elettriche complessive Q_0, Q_1 e Q_2 nelle tre regioni di spazio $0 \le r \le R$, $R < r \le 2R$ e $2R < r \le 3R$, sono date da:

$$Q_0 = \int_0^R 4\pi r^2 k r dr = \pi k R^4 \sim 0.0157\,\mathrm{C} \tag{1}$$

$$Q_1 = -\rho_1 \frac{4\pi}{3}\left((2R)^3 - R^3\right) \sim -0.0220\,\mathrm{C} \tag{2}$$

$$Q_2 = \rho_2 \frac{4\pi}{3}\left((3R)^3 - (2R)^3\right) \tag{3}$$

Imponendo $Q_0 + Q_1 + Q_2 = 0$, si ottiene:

$$\rho_2 = -\frac{Q_0 + Q_1}{\frac{4\pi}{3}\left((3R)^3 - (2R)^3\right)} \sim 0.079\,\mathrm{C/m^3}\ . \tag{4}$$

Il campo elettrico è a simmetria sferica. Per calcolare il modulo $E(r)$ tra $0 \le r \le R$, applichiamo il teorema di Gauss

$$\int_{S(r)} \vec{E}(r)\cdot d\vec{S} = 4\pi r^2 E(r) = \frac{Q(r)}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0}\int_0^r 4\pi r^2 k r dr = \frac{k\pi}{\epsilon_0} r^4\ , \tag{5}$$

dove $S(r)$ è la superficie sferica di raggio r. Si ha pertanto:

$$E(r) = \frac{k}{4\epsilon_0} r^2, \qquad 0 \le r \le R\ . \tag{6}$$

Per $R < r \le 2R$, applicando nuovamente il teorema di Gauss otteniamo

$$\int_{S(r)} \vec{E}(r)\cdot d\vec{S} = 4\pi r^2 E(r) = \frac{Q(r)}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0}\left(Q_0 - \rho_1 \frac{4\pi}{3}(r^3 - R^3)\right)\ , \tag{7}$$

da cui:

$$E(r) = \frac{Q_0}{4\pi\epsilon_0 r^2} - \frac{\rho_1}{3\epsilon_0}\left(r - \frac{R^3}{r^2}\right)\ , \qquad R < r \le 2R\ . \tag{8}$$

Similmente, per $2R < r \le 3R$, si ha:

$$\int_{S(r)} \vec{E}(r)\cdot d\vec{S} = 4\pi r^2 E(r) = \frac{Q(r)}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0}\left(Q_0 + Q_1 + \rho_2 \frac{4\pi}{3}(r^3 - (2R)^3)\right)\ , \tag{9}$$

da cui:

$$E(r) = \frac{Q_0 + Q_1}{4\pi\epsilon_0 r^2} + \frac{\rho_2}{3\epsilon_0}\left(r - \frac{(2R)^3}{r^2}\right)\ , \qquad 2R < r \le 3R\ . \tag{10}$$

Infine, $E(r) = 0$ per $r > 3R$, avendo imposto $Q_0 + Q_1 + Q_2 = 0$. Calcoliamo ora il lavoro W necessario per portare la carica q_0 da $r = \infty$ a $r = 0$. Il lavoro è uguale a $W = q_0 V(0)$, dove $V(0)$ è il valore del potenziale elettrico nell'origine. Quest'ultimo si ricava da:

$$V(0) = \int_0^{3R} \vec{E}(r) d\vec{r} = \int_0^R E(r)dr + \int_R^{2R} E(r)dr + \int_{2R}^{3R} E(r)dr \ . \tag{11}$$

Utilizzando per $E(r)$ le formule ricavate nel punto precedente si ha:

$$\int_0^R E(r)dr = \frac{kR^3}{12\epsilon_0} \ , \tag{12}$$

$$\int_R^{2R} E(r)dr = \frac{Q_0}{8\pi\epsilon_0 R} - \frac{\rho_1}{3\epsilon_0} R^2 \ , \tag{13}$$

$$\int_{2R}^{3R} E(r)dr = \frac{Q_0 + Q_1}{24\pi\epsilon_0 R} + \frac{7\rho_2}{18\epsilon_0} R^2 \ . \tag{14}$$

pertanto utilizzando i dati del problema si trova $qV(0) \simeq 835\,\mathrm{J}$.

Soluzione Esercizio 2

Il campo magnetico generato dal filo conduttore nel piano xy è dato da:

$$\vec{B}(x,y) = \frac{\mu_0 i}{2\pi x} \hat{z} \ , \tag{15}$$

avendo preso l'origine dell'asse x coincidente con la posizione del filo conduttore ($\hat{x}$ è orientato come in figura 2). Il versore $\hat{z}$ è perpendicolare al foglio e con verso entrante. Il flusso $\phi_B(t)$ del campo magnetico concatenato alla spira al tempo t è dato da:

$$\begin{aligned} \phi_B(t) &= \int_{-h/2}^{h/2} \int_{x(t)-L/2}^{x(t)+L/2} B(x,y) dx dy = \frac{\mu_0 i h}{2\pi} \int_{x(t)-L/2}^{x(t)+L/2} \frac{dx}{x} \\ &= \frac{\mu_0 i h}{2\pi} \log \frac{d + L/2 + A\sin(\omega t)}{d - L/2 + A\sin(\omega t)} \ . \end{aligned} \tag{16}$$

La corrente $i_{ind.}(t)$ indotta nella spira si trova invece dalla legge di Faraday:

$$\begin{aligned} i_{ind.}(t) &= \frac{\mathcal{E}(t)}{R} = -\frac{1}{R} \frac{\partial \phi_B(t)}{\partial t} \\ &= \frac{\mu_0 i h L A \omega \cos(\omega t)}{2\pi R \left(d + L/2 + A\sin(\omega t)\right)\left(d - L/2 + A\sin(\omega t)\right)} \ . \end{aligned} \tag{17}$$

La potenza $P_R(t)$ dissipata al tempo t per effetto Joule è data da $P_R(t) = R i_{ind.}^2(t)$, che al tempo $t = 0$, utilizzando le formule precedenti, si riduce a:

$$P_R(0) = \frac{(\mu_0 i h L A \omega)^2}{4\pi^2 R (d^2 - (L/2)^2)^2} \sim 4.4 \times 10^{-6}\ \mathrm{W} \tag{18}$$

La forza agente sulla spira dovuta al campo magnetico generato dal filo conduttore, è data dalla somma delle forze agenti sui due lati della spira paralleli al filo conduttore, dal momento che i contributi sui lati della spira ortogonali al filo sono uguali in modulo e opposti in verso. Su ogni lato la forza agente si calcola utilizzando la nota formula $\vec{F}_L = i_{ind.}\vec{l} \times \vec{B}$. Sui due lati della spira paralleli al filo conduttore agisce una forza opposta in verso ma di modulo diverso, pertanto la somma dei due contributi non è nulla. Al tempo $t = 0$, si ha

$$F = hi_{ind}(0) \cdot \left(\frac{\mu_0 i}{2\pi(d - L/2)} - \frac{\mu_0 i}{2\pi(d + L/2)} \right) \ , \tag{19}$$

ed utilizzando i dati del problema si ottiene $F(t = 0) = 2.2 \times 10^{-8}$ N.

Soluzione Esercizio 3

Prima che venga acceso il campo magnetico, la spira si muove di moto rettilineo uniforme con velocità v_0 diretta verso destra. Nel momento in cui viene acceso il campo magnetico, il flusso concatenato al circuito al tempo t sarà dato da:

$$\phi_B(t) = LBx(t) \ , \tag{20}$$

avendo indicato con $x(t)$ la posizione al tempo t della sbarretta. La variazione del flusso del campo magnetico produce quindi una corrente indotta $i(t)$ nel circuito data da:

$$i(t) = \frac{\mathcal{E}(t)}{R} = -\frac{1}{R}\frac{\partial \phi_B(t)}{\partial t} = -\frac{LB}{R}v(t) \ , \tag{21}$$

dove $v(t)$ è la velocità della sbarretta al tempo t. Sulla sbarretta agisce allora una forza F data da:

$$F \equiv m\frac{dv(t)}{dt} = BLi(t) = -\frac{(BL)^2}{R}v(t) \ . \tag{22}$$

Questo implica che quando il campo magnetico è acceso, la velocità della sbarretta evolve secondo:

$$\frac{dv(t)}{dt} = -\frac{(BL)^2}{mR}v(t) \implies v(t) = v_0 e^{-t/\tau} \ , \tag{23}$$

con $\tau = mR/(BL)^2$, ed utilizzando i dati del problema si ha $\tau = 0.25\,\mathrm{s}$. Pertanto la velocità finale della particella dopo un tempo $t = 1\,\mathrm{s}$ sarà data da:

$$v_{fin} = v_0 e^{-4} \sim 3.66\,\mathrm{m\,s^{-1}} \ . \tag{24}$$

L'energia dissipata dalla resistenza per effetto Joule si trova da:

$$\begin{aligned} W_R &= \int_0^{1s} P_R(t)dt = \int_0^{1s} Ri^2(t)dt = \int_0^{1s} \frac{B^2L^2}{R}v^2(t)dt \\ &= \frac{(BLv_0)^2}{R}\int_0^{1s} dte^{-2t/\tau} = -\frac{(BLv_0)^2}{R} \cdot \frac{\tau}{2}e^{-2t/\tau}\Big|_0^{1s} \\ &= \frac{(BLv_0)^2}{R} \cdot \frac{\tau}{2}\left(1 - e^{-8}\right) \ . \end{aligned} \tag{25}$$

Utilizzando la definizione di τ data precedentemente si ottiene:

$$W_R = \frac{m}{2} v_0^2 \left(1 - e^{-8}\right) = \frac{m}{2} \left(v_0^2 - v_{fin}^2\right) \sim 1.0 \times 10^3 \text{ J} \;, \tag{26}$$

che è uguale all'energia cinetica persa dalla sbarretta.