

Esercizio 1

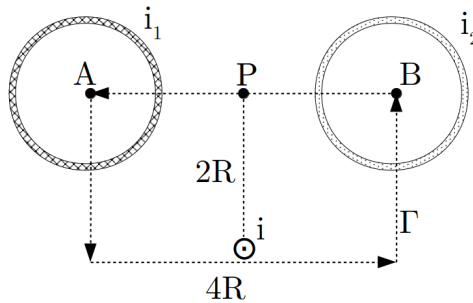
Un guscio sferico, di raggio interno $R_1 = 5$ cm e raggio esterno $R_2 = 20$ cm, contiene una carica distribuita con densità uniforme $\rho = 4 \cdot 10^{-6}$ C/m³. Nello spazio interno $r < R_1$ la carica è nulla.

1. Determinare il campo elettrico $\vec{E}$ in tutto lo spazio. [4 punti]
2. Calcolare la differenza di potenziale tra la superficie interna ed esterna del guscio. [4 punti]
3. Calcolare il lavoro necessario a portare una carica puntiforme $q = 8 \cdot 10^{-6}$ C da distanza infinita al centro della sfera. [3 punti]

Esercizio 2

Due sottili gusci cilindrici conduttori indefiniti e paralleli, di raggio $R = 5$ cm e i cui centri distano $d = 4R$, sono percorsi dalle correnti $i_1 = 4$ A (entrante nel foglio) e $i_2 = 9$ A (uscente). A distanza $2R$ dal punto P intermedio fra i due centri si trova un filo, indefinito e parallelo ai cilindri, percorso da una corrente stazionaria i (uscente). Sapendo che la circuitazione del campo magnetico lungo la linea Γ mostrata in figura è pari a $2 \cdot 10^{-5}$ Tm, calcolare:

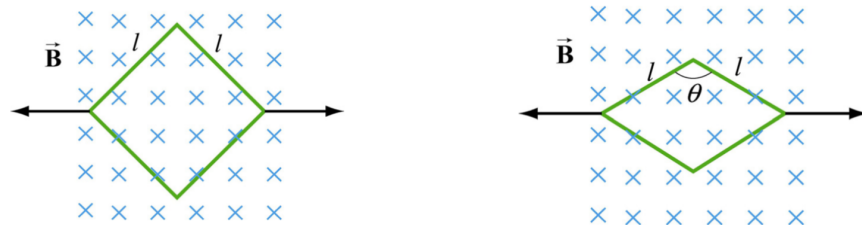
1. l'intensità della corrente che percorre il filo; [3 punti]
2. il modulo del campo magnetico nel punto P; [4 punti]
3. la forza per unità di lunghezza esercitata sul filo dai cilindri. [4 punti]



Esercizio 3

Una spira quadrata di lato $l = 0.2$ m è immersa in un campo magnetico uniforme $\vec{B}$ di modulo 0.5 T ed entrante nel piano della pagina. Durante un intervallo di tempo $\Delta t = 0.1$ s, la spira viene deformata tirando due lati opposti fino a diventare un rombo con angolo $\theta_f = 150^\circ$. La lunghezza dei lati rimane l . La spira ha resistenza totale $R = 2 \Omega$.

1. Calcolare il flusso magnetico iniziale e finale. [3 punti]
2. Calcolare la f.e.m. media e la corrente media indotta nel circuito, specificando il verso. [3 punti]
3. Se la deformazione avviene con velocità angolare $\omega = d\theta/dt$ costante, determinare la f.e.m. istantanea. [5 punti]



Soluzione del primo esercizio:

1. Per simmetria sferica il campo elettrico è radiale: $\vec{E}(r) = E(r) \hat{r}$. Applichiamo la legge di Gauss.

Nella regione $r < R_1$ non è racchiusa alcuna carica, quindi:

$$E(r) = 0 \quad (r < R_1). \quad (1)$$

Nella regione $R_1 < r < R_2$, la carica racchiusa è:

$$Q_{\text{int}}(r) = \rho \frac{4\pi}{3} (r^3 - R_1^3). \quad (2)$$

Applicando Gauss:

$$E(r) 4\pi r^2 = \frac{\rho}{\varepsilon_0} \frac{4\pi}{3} (r^3 - R_1^3) \quad (3)$$

da cui:

$$E(r) = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} \frac{r^3 - R_1^3}{r^2} \quad (R_1 < r < R_2). \quad (4)$$

Nella regione $r > R_2$, occorre considerare che la carica totale del guscio è:

$$Q_{\text{tot}} = \rho \frac{4\pi}{3} (R_2^3 - R_1^3). \quad (5)$$

Il campo vale:

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q_{\text{tot}}}{r^2} \quad (r > R_2). \quad (6)$$

2. La differenza di potenziale è:

$$V(R_1) - V(R_2) = - \int_{R_2}^{R_1} E(r) dr. \quad (7)$$

Sostituendo $E(r)$ nella regione $R_1 < r < R_2$:

$$V(R_1) - V(R_2) = - \int_{R_2}^{R_1} \frac{\rho}{3\varepsilon_0} \frac{r^3 - R_1^3}{r^2} dr \quad (8)$$

$$= \frac{\rho}{3\varepsilon_0} \int_{R_1}^{R_2} \left(r - \frac{R_1^3}{r^2} \right) dr. \quad (9)$$

Integrando:

$$V(R_1) - V(R_2) = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} \left[\frac{r^2}{2} + \frac{R_1^3}{r} \right]_{R_1}^{R_2} \quad (10)$$

Si ottiene infine

$$V(R_1) - V(R_2) = 2.55 \cdot 10^3 \text{ V} \quad (11)$$

3. Il lavoro richiesto è dato dalla somma dei lavori necessari per portare la carica fino a R_2 , poi attraverso il guscio e infine al centro. D'altra parte, essendo $E = 0$ per $r < R_1$, il potenziale è costante nella cavità e quindi nell'ultimo tratto il lavoro è nullo. Allora

$$W = q [V(R_2) - V(\infty)] + q [V(R_1) - V(R_2)] \quad (12)$$

Ponendo $V(\infty) = 0$, si ha quindi:

$$W = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{Q_{\text{tot}}}{R_2} + q [V(R_1) - V(R_2)] \quad (13)$$

si ottiene infine:

$$W = 6.8 \cdot 10^{-2} \text{ J} \quad (14)$$

Soluzione del secondo esercizio:

1. Intanto osserviamo che le correnti concatenate a Γ sono le seguenti: i dovuta al filo, $-i_1/4$ dovuta al quarto di cilindro 1, $i_2/4$ dovuta al quarto di cilindro 2. Utilizzando il teorema di Ampère

$$\Lambda = \mu_0 \left(i - \frac{i_1}{4} + \frac{i_2}{4} \right) \quad (15)$$

$$i = \frac{\Lambda}{\mu_0} + \frac{i_1}{4} - \frac{i_2}{4} = 14.67 \text{ A} \quad (16)$$

2. Componendo i campi magnetici dovuti a ciascuna corrente

$$B_{P,x} = \frac{\mu_0 i}{4\pi R} \quad (17)$$

$$B_{P,y} = \frac{\mu_0 i_1}{4\pi R} + \frac{\mu_0 i_2}{4\pi R} \quad (18)$$

$$B_P = \sqrt{B_{P,x}^2 + B_{P,y}^2} = \frac{\mu_0}{4\pi R} \sqrt{i^2 + (i_1 + i_2)^2} = 39.2 \mu\text{T} \quad (19)$$

3. Le forze esercitate dai cilindri sul filo sono:

$$F_1 = i\ell B_1 = i\ell \frac{\mu_0 i_1}{4\pi R\sqrt{2}} \quad (20)$$

$$F_2 = i\ell B_2 = i\ell \frac{\mu_0 i_2}{4\pi R\sqrt{2}} \quad (21)$$

inoltre sono dirette a $\pi/2$ fra di loro, per cui

$$F_\ell = \frac{F}{\ell} = \frac{\mu_0 i}{4\pi R\sqrt{2}} \sqrt{i_1^2 + i_2^2} = 2.04 \times 10^{-4} \text{ N/m} \quad (22)$$

Soluzione del terzo esercizio:

1. L'area iniziale della spira quadrata è:

$$A_i = l^2 \quad (23)$$

Il flusso iniziale è:

$$\Phi_i = BA_i = Bl^2 = 0.02 \text{ Wb} \quad (24)$$

L'area del rombo alla fine è:

$$A_f = l^2 \sin \theta_f \quad (25)$$

Il flusso finale:

$$\Phi_f = Bl^2 \sin \theta_f = 0.01 \text{ Wb} \quad (26)$$

2. Per la legge di Faraday:

$$\mathcal{E}_{media} = -\frac{\Delta\Phi}{\Delta t} = 0.1 \text{ V} \quad (27)$$

che è positiva perché il flusso diminuisce. La corrente media indotta è quindi

$$I_{media} = \frac{\mathcal{E}_{media}}{R} = 0.05 \text{ A} \quad (28)$$

e scorre in senso orario con riferimento alla figura.

3. Se l'angolo varia nel tempo con velocità angolare costante:

$$\theta(t) = \theta_0 + \omega t \quad (29)$$

Il flusso nel tempo è:

$$\Phi(t) = Bl^2 \sin \theta(t) \quad (30)$$

Derivando rispetto al tempo:

$$\mathcal{E}(t) = -\frac{d\Phi}{dt} = -Bl^2 \cos \theta(t) \frac{d\theta}{dt} \quad (31)$$

Poiché:

$$\frac{d\theta}{dt} = \omega \quad (32)$$

otteniamo:

$$\mathcal{E}(t) = -Bl^2\omega \cos \theta(t) \quad (33)$$