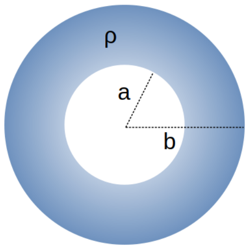
Fisica 2 - Secondo scritto febbraio 2024

Esercizio 1

Una carica elettrica è distribuita in un guscio sferico di raggio interno a=10 cm e raggio esterno b=20 cm. La densità di carica nel guscio sferico vale ρ=k+αr, dove r è la distanza dal centro, k=2×10^{-3} C/m^3 e α=10^{-3} C/m^4.

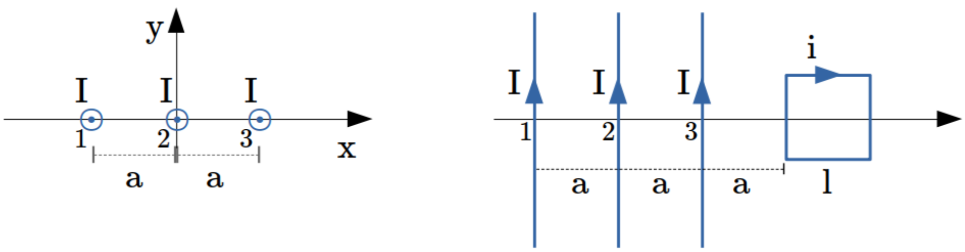
1. Calcolare la carica totale Q_{tot} **[3 punti]**
2. Determinare il campo elettrico in funzione di r in tutto lo spazio. **[4 punti]**
3. Ponendo il potenziale $V(\infty) = 0$, calcolare $V(2b)$ e dire quanto vale la differenza $V(0) - V(a/2)$. **[4 punti]**



Esercizio 2

Si hanno tre fili indefiniti, paralleli e disposti a distanza reciproca a = 30 cm come in figura, ognuno attraversato da una corrente I = 20 A.

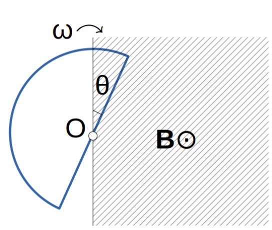
1. Determinare il campo magnetico sull'asse x e i punti dell'asse in cui $B = 0$. **[4 punti]**
2. Una spira quadrata di lato l=35 cm, percorsa da corrente i = 5 A, viene posta sul piano dei tre fili, a distanza a come in figura. Calcolare la forza che agisce sulla spira. **[4 punti]**
3. Calcolare il flusso del campo magnetico attraverso la spira. **[3 punti]**



Esercizio 3

Una spira semicircolare di resistenza R e raggio a si trova al bordo di una regione in cui c'è un campo magnetico uniforme B. La spira viene fatta ruotare con velocità angolare ω costante intorno all'asse O parallelo al campo.

1. Scrivere il flusso di $\vec{B}$ attraverso la spira in funzione del tempo, durante la prima semirotazione $0 \leq \theta \leq \pi$ e durante la seconda semirotazione $\pi \leq \theta \leq 2\pi$. **[4 punti]**
2. Scrivere la f.e.m. e la corrente indotte nella spira in funzione del tempo. Disegnarne il grafico per una rotazione completa. **[4 punti]**
3. Calcolare la potenza dissipata per effetto Joule (R=10 Ω, a=10 cm, B=1 T, ω=0.2 rad/s). **[3 punti]**



Soluzione del primo esercizio:

1. La carica totale è

$$Q_{\text{tot}} = \int \rho \, dV = \int_a^b (k + \alpha r')4\pi r'^2 \, dr' = 4\pi \left[\frac{k}{3}(b^3 - a^3) + \frac{\alpha}{4}(b^4 - a^4) \right] = 6.3 \times 10^{-5} \text{ C} \quad (1)$$

2. Notiamo che ρ è funzione solo di r, quindi per la simmetria sferica anche il campo elettrico sarà radiale e funzione solo di r: $\vec{E} = E(r)\hat{u}_r$. Possiamo quindi usare il teorema di Gauss prendendo una superficie sferica di raggio r:

$$4\pi r^2 E(r) = \frac{1}{\epsilon_0} \int \rho_{\text{int}}(r) \, dV \quad (2)$$

Poiché $\rho(r < a) = 0$, si ottiene immediatamente

$$E(r < a) = 0. \quad (3)$$

All'interno del guscio ($a < r < b$) si ha invece:

$$4\pi r^2 E(r) = \frac{1}{\epsilon_0} \int_a^r (k + \alpha r')4\pi r'^2 \, dr' \quad (4)$$

da cui si ricava

$$E(a < r < b) = \frac{1}{\epsilon_0 r^2} \left[\frac{k}{3}(r^3 - a^3) + \frac{\alpha}{4}(r^4 - a^4) \right] \quad (5)$$

All'esterno del guscio ($r > b$) si ha infine:

$$4\pi r^2 E(r) = \frac{1}{\epsilon_0} \int_a^b (k + \alpha r')4\pi r'^2 \, dr' \quad (6)$$

ovvero

$$E(r > b) = \frac{1}{\epsilon_0 r^2} \left[\frac{k}{3}(b^3 - a^3) + \frac{\alpha}{4}(b^4 - a^4) \right] \equiv \frac{Q_{\text{tot}}}{4\pi\epsilon_0 r^2} \quad (7)$$

3. Il potenziale si trova integrando:

$$V(r) = \int_r^\infty E(r) \, dr \quad (8)$$

Poiché ci interessa il caso $r = 2b$, dobbiamo usare l'espressione di $E(r)$ data dalla (7):

$$V(2b) = \frac{Q_{\text{tot}}}{4\pi\epsilon_0} \int_{2b}^\infty \frac{1}{r^2} \, dr = \frac{Q_{\text{tot}}}{8\pi\epsilon_0 b} = 1.4 \times 10^6 \text{ V}. \quad (9)$$

Invece per $r < a$ il campo è nullo, quindi il potenziale è costante: $V(0) - V(a/2) = 0$.

Soluzione del secondo esercizio:

1. Vediamo il campo magnetico prodotto da ogni filo. Ponendo l'origine dell'asse x in corrispondenza del filo 2, si ha:

$$B_1 = \frac{\mu_0 I}{2\pi(x+a)} \tag{10}$$

$$B_2 = \frac{\mu_0 I}{2\pi x} \tag{11}$$

$$B_3 = \frac{\mu_0 I}{2\pi(x-a)} \tag{12}$$

Quindi

$$B(x) = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\left(\frac{1}{x+a} + \frac{1}{x} + \frac{1}{x-a}\right) \tag{13}$$

e imponendo $B(x) = 0$ si ottiene

$$x = \pm\frac{a}{\sqrt{3}} = \pm 17.32 \text{ cm} \tag{14}$$

2. Sulla spira agisce la forza di Lorentz:

$$\vec{F}_L = \int i\, d\vec{l} \times \vec{B} = [i\, l\, B(2a+l) - i\, l\, B(2a)]\, \hat{u}_x \tag{15}$$

dove si considerano i soli lati verticali, in quanto i lati orizzontali danno contributo totale nullo (la forza su di essi è uguale in modulo e opposta in verso). Ora,

$$B(2a) = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\left(\frac{1}{3a} + \frac{1}{2a} + \frac{1}{a}\right) = 2.44 \times 10^{-5} \text{ T} \tag{16}$$

$$B(2a+l) = \frac{\mu_0 I}{2\pi}\left(\frac{1}{3a+l} + \frac{1}{2a+l} + \frac{1}{a+l}\right) = 1.36 \times 10^{-5} \text{ T} \tag{17}$$

quindi

$$F_L = i\, l\, [B(2a+l) - B(2a)] = 1.89 \times 10^{-5} \text{ N} \tag{18}$$

3. Il flusso del campo magnetico attraverso la spira è

$$\Phi = \int \vec{B} \cdot \vec{n}\, dS = \int_{2a}^{2a+l} B(x)\, l\, dx = \frac{\mu_0 I l}{2\pi}\left[\log\left(\frac{3a+l}{3a}\right) + \log\left(\frac{2a+l}{2a}\right) + \log\left(\frac{a+l}{a}\right)\right] = 2.19 \times 10^{-6} \text{ Wb} \tag{19}$$

Soluzione del terzo esercizio:

Il flusso del campo magnetico è

$$\Phi = \vec{B} \cdot \vec{n} S \tag{20}$$

dove $\vec{n}$ è il versore della spira e S l'area immersa nel campo magnetico, che vale $S = \frac{1}{2}a^2\theta$. Durante la prima semirotazione, si ha $\theta = \omega t$ e quindi:

$$\Phi_1(t) = B \cdot \frac{1}{2}a^2\theta(t) = \frac{1}{2}Ba^2\omega t \tag{21}$$

Durante la seconda semirotazione, l'area immersa nel campo diminuisce nel tempo. L'angolo $\theta = \pi - \omega t$ (ponendo $t = 0$ quando $\theta = \pi$) e quindi

$$\Phi_2(t) = \frac{1}{2}Ba^2(\pi - \omega t) \tag{22}$$

Si può anche scegliere di misurare t dall'istante in cui $\theta = 0$, e in questo caso $\theta = 2\pi - \omega t$ (o equivalentemente $\theta = -\omega t$). La scelta non influisce sul calcolo della f.e.m. perché ciò che conta è la derivata di $\Phi(t)$.

2. Le f.e.m. indotta è rispettivamente

$$\varepsilon_1 = -\frac{d\Phi_1}{dt} = -\frac{1}{2}Ba^2\omega \tag{23}$$

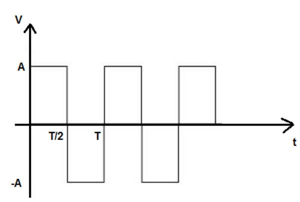
$$\varepsilon_2 = -\frac{d\Phi_2}{dt} = \frac{1}{2}Ba^2\omega \tag{24}$$

e quindi la corrente

$$i_1 = \frac{\varepsilon_1}{R} = -\frac{Ba^2\omega}{2R} \tag{25}$$

$$i_2 = \frac{\varepsilon_2}{R} = \frac{Ba^2\omega}{2R} \tag{26}$$

Si ha quindi una funzione di tipo "onda quadra".



3. La potenza dissipata per effetto Joule è

$$P = \mathcal{R}i^2 = \frac{B^2a^4\omega^2}{4R} = 10^{-7}\ \mathrm{W} \tag{27}$$