Soluzione Esercizio 1

Il campo magnetico generato da un filo infinito percorso da corrente $i(t)$ è dato dalla legge di Biot Savart

$$\vec{B}(t) = \frac{\mu_0 i(t)}{2\pi r}\hat{u}_\phi \ , \tag{1}$$

dove r è la distanza dal filo conduttore. Nel centro della spira si ha che il campo magnetico totale $\vec{B}_0(t)$, è dato dalla somma dei campi magnetici generati dai due fili. I due fili si trovano a lati opposti della spira, pertanto

$$\vec{B}_0(t) = \frac{\mu_0}{\pi d}(i_1(t) - i_2(t))\hat{y} \ , \tag{2}$$

dove $\hat{y}$ è il versore entrante nel foglio. Si ha quindi

$$\vec{B}_0(t) = \frac{\mu_0}{\pi d} i_0(\cos(\omega t) - \sin(\omega t))\hat{y} \ . \tag{3}$$

Calcoliamo ora il flusso del campo magnetico concatenato alla spira al tempo t. Si ha:

$$\phi_B(t) = \int_{spira} \vec{B}_1(t) \cdot d\vec{S} + \int_{spira} \vec{B}_2(t) \cdot d\vec{S} \ , \tag{4}$$

dove $\vec{B}_1$ e $\vec{B}_2$ sono i campi magnetici generati rispettivamente dai fili percorsi da corrente $i_1(t)$ e $i_2(t)$, e $d\vec{S} \parallel \hat{y}$. Nel piano della spira, scegliamo un sistema di assi ortogonali $x-z$ con origine nel centro della spira ($\hat{x}$ diretto verso destra, $\hat{z}$ verso l'alto). Si ha,

$$\vec{B}_1(x,t) = \frac{\mu_0 i_1(t)}{2\pi(\frac{d}{2} + x)}\hat{y}, \qquad \vec{B}_2(x,t) = -\frac{\mu_0 i_2(t)}{2\pi(\frac{d}{2} - x)}\hat{y}, \tag{5}$$

pertanto

$$\begin{aligned}
\phi_B(t) &= \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dz \int_{-\frac{L}{2}}^{\frac{L}{2}} dx \left[\frac{\mu_0 i_1(t)}{2\pi(\frac{d}{2} + x)} - \frac{\mu_0 i_2(t)}{2\pi(\frac{d}{2} - x)}\right] \\
&= \frac{L\mu_0}{2\pi}(i_1(t) - i_2(t)) \ln \frac{1 + \frac{L}{d}}{1 - \frac{L}{d}} \\
&= \frac{L\mu_0 i_0}{2\pi}(\cos(\omega t) - \sin(\omega t)) \ln \frac{1 + \frac{L}{d}}{1 - \frac{L}{d}} \ .
\end{aligned} \tag{6}$$

Per la legge di Faraday, la fem indotta nella spira vale

$$\mathcal{E}(t) = -\frac{d\phi_B(t)}{dt} = \frac{L\mu_0 i_0 \omega}{2\pi} \ln 3 \cdot (\sin(\omega t) + \cos(\omega t)). \tag{7}$$

Pertanto, se la spira ha una resistenza complessiva R, la corrente indotta $i(t)$ vale:

$$i(t) = \frac{\mathcal{E}(t)}{R} = \frac{L\mu_0 i_0 \omega}{2\pi R} \ln 3 \cdot (\sin(\omega t) + \cos(\omega t)). \tag{8}$$

Per $t' = \pi/(2\omega)$, si ha $\sin(\omega t') = 1$, $\cos(\omega t') = 0$, quindi

$$i(t') = \frac{L\mu_0 i_0 \omega}{2\pi R} \ln 3 \cdot \implies R = \frac{L\mu_0 i_0 \omega \ln 3}{2\pi i(t')} \ . \tag{9}$$

Utilizzando i dati del problema si trova $R \sim 220\,\Omega$. Per rispondere all'ultimo punto è sufficiente notare che per $t'' = 3\pi/(4\omega)$ la fem indotta, e quindi la corrente nella spira, è nulla. Pertanto $dF/d\ell = 0$.

Soluzione Esercizio 2

Sulla sbarretta conduttrice di massa m agiscono la forza di gravità e la forza di Lorentz. Con la convenzione del problema sull'orientazione della corrente $i(t)$, e indicando con $v(t)$ la velocità verticale della sbarretta (presa positiva se diretta verso il basso), si ha:

$$m\frac{dv(t)}{dt} = ma(t) = mg + i(t)Bd \implies \frac{dv(t)}{dt} = g + i(t)\frac{Bd}{m} \ . \tag{10}$$

La derivata del flusso del campo magnetico concatenato al circuito vale:

$$\frac{d\phi_B(t)}{dt} = Bdv(t) \ , \tag{11}$$

pertanto per la legge di Faraday la fem indotta vale

$$\mathcal{E}(t) = -Bdv(t) \ . \tag{12}$$

Dal momento che è presente un induttore di induttanza L, la fem indotta è legata alla derivata temporale della corrente $di(t)/dt$ tramite:

$$\mathcal{E}(t) = L\frac{di(t)}{dt} \implies \frac{di(t)}{dt} = -\frac{Bd}{L}v(t) \ . \tag{13}$$

Derivando rispetto al tempo entrambi i membri in Eq. (10), si ha:

$$\frac{d^2v(t)}{dt^2} = \frac{di(t)}{dt}\frac{Bd}{m} = -\frac{d^2B^2}{mL}v(t) \ . \tag{14}$$

Quindi $v(t)$ soddisfa l'equazione differenziale di un oscillatore armonico con pulsazione:

$$\omega = \frac{dB}{\sqrt{mL}} \ . \tag{15}$$

Utilizzando i dati del problema si ha $\omega = 25\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$.
La soluzione generale di Eq. (14) è:

$$v(t) = V \sin(\omega t + \phi) \ . \tag{16}$$

Per determinare il valore dell'ampiezza V e della fase ϕ, utilizziamo le condizioni iniziali $v(0) = 0$ e $i(0) = 0$. La prima condizione ci dice che $\phi = 0$, ed utilizzando Eq. (10) con $i(0) = 0$, si ha:

$$\left.\frac{dv(t)}{dt}\right|_{t=0} = g \ . \tag{17}$$

Questo implica che $V = g/\omega \sim 0.39\,\mathrm{m\,s^{-1}}$.