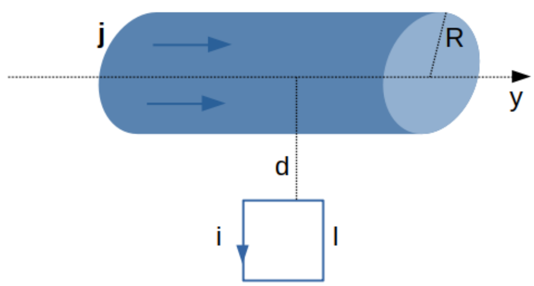
Fisica 2 - Secondo esonero gennaio 2024

Esercizio 1

In un cilindro indefinito di raggio $R = 10$ cm scorre una certa corrente di densità $\vec{j}$ parallelamente all'asse del cilindro. La densità di corrente ha modulo $j(r) = k \cdot r^{\alpha}$, dove k e α sono due costanti e r è la distanza dall'asse.

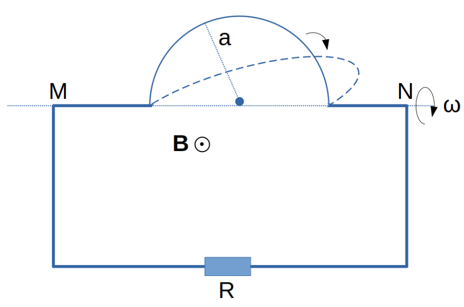
1. Determinare la corrente totale che scorre nel cilindro per k e α generici. Calcolarne poi il valore numerico nel caso $\alpha = 1$ e $k = 2.4 \times 10^3$ A/m^3. [**3 punti**]
2. Determinare il campo magnetico $B(r < R)$ all'interno del cilindro e calcolarne il valore a $r = R/2$ (con α e k dati sopra). [**4 punti**]
3. Determinare il campo magnetico $B(r > R)$ all'esterno del cilindro e calcolarne il valore a $r = 2R$. [**4 punti**]
4. Una spira quadrata di lato $l = 8$ cm, complanare all'asse del cilindro, si trova a distanza $d = 20$ cm dall'asse ed è percorsa da corrente $i_s = 3$ A nel verso indicato in figura. Calcolare la forza che agisce sulla spira. [**4 punti**]



Esercizio 2

Il circuito mostrato in figura è composto da un tratto fisso a forma rettangolare e uno a forma di semicirconferenza di raggio $a = 25$ cm, che ruota intorno all'asse MN con velocità angolare costante $\omega = 100$ rad/s. Il circuito è immerso in un campo magnetico uniforme, di modulo $B = 1.5$ T e perpendicolare al piano che contiene il tratto fisso. La resistenza del circuito è $\mathcal{R} = 40\,\Omega$ e l'autoinduzione è trascurabile.

1. Scrivere l'espressione del flusso del campo magnetico attraverso il tratto semicircolare, in funzione del tempo. Calcolarne il valore massimo. [**4 punti**]
2. Determinare l'espressione della corrente nel circuito in funzione del tempo e calcolarne il valore massimo. [**5 punti**]
3. Determinare la potenza media dissipata sulla resistenza in un periodo di rotazione; usare il risultato per calcolare l'energia dissipata in un periodo. [**6 punti**]
4. Dire dove si sviluppa la f.e.m. nel circuito e quanto vale la differenza di potenziale tra M e N. [**3 punti**]



Soluzione del primo esercizio:

1. La corrente all'interno del cilindro è

$$i = \int_0^R j(r) 2\pi r dr = 2\pi \int_0^R k r^{\alpha+1} dr = 2\pi k \frac{R^{\alpha+2}}{\alpha+2} \tag{1}$$

Nel caso $\alpha = 1$,

$$i = 2\pi k \frac{R^3}{3} \tag{2}$$

e numericamente risulta

$$i \simeq 5\,\mathrm{A}. \tag{3}$$

2. Poiché j dipende unicamente da r, si ha simmetria cilindrica e le linee del campo sono circonferenze. Applichiamo il teorema di Ampère all'interno del cilindro:

$$B(r) \cdot 2\pi r = \mu_0 \cdot i(r) = \mu_0 \int_0^r j(r') 2\pi r' dr' \tag{4}$$

Inserendo $j(r') = k \cdot r'^{\alpha}$, si trova analogamente all'eq. (1):

$$B(r) \cdot 2\pi r = \mu_0 \cdot 2\pi k \frac{r^{\alpha+2}}{\alpha+2} \tag{5}$$

Quindi all'interno del cilindro si ha:

$$B(r < R) = \mu_0 k \frac{r^{\alpha+1}}{\alpha+2} \tag{6}$$

Per $\alpha = 1$:

$$B(r < R) = \mu_0 k \frac{r^2}{3} \tag{7}$$

Numericamente:

$$B(r = R/2) \simeq 2.5 \times 10^{-6}\ \mathrm{T} \tag{8}$$

3. Il campo magnetico all'esterno del cilindro è lo stesso che produrrebbe un filo indefinito, sempre per il Teorema di Ampère:

$$B(r) = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \tag{9}$$

dove i è data dall'eq. (1). Quindi:

$$B(r > R) = \frac{\mu_0 k}{r} \frac{R^{\alpha+2}}{\alpha+2} \tag{10}$$

Per $\alpha = 1$:

$$B(r > R) = \frac{\mu_0 k}{r} \frac{R^3}{3} \tag{11}$$

Numericamente:

$$B(r = 2R) \simeq 5 \times 10^{-6}\ \mathrm{T} \tag{12}$$

4. Il campo magnetico è ortogonale al piano della spira. Sulla spira agisce quindi la forza di Lorentz $\int i_s d\vec{l} \times \vec{B}$. Basta effettuare il calcolo sui soli tratti orizzontali, perché la forza sui due lati verticali è uguale in modulo e opposta in verso.

$$F = i_s \cdot l \cdot B(d) - i_s \cdot l \cdot B(d+l) = i_s \cdot l \cdot [B(d) - B(d+l)] \tag{13}$$

dove per il calcolo di B occorre usare l'eq. (7). Si trova infine

$$F = 3.4 \times 10^{-7}\,\mathrm{N}. \tag{14}$$

Soluzione del secondo esercizio:

1. Il flusso del campo magnetico è

$$\Phi = \vec{B} \cdot \vec{n} S \tag{15}$$

dove $\vec{n}$ è il versore del tratto semicircolare e $S = \pi a^2/2$ la sua area. All'istante generico t, l'angolo tra $\vec{B}$ e $\vec{n}$ è $\theta = \omega t$ quindi:

$$\Phi(t) = B \frac{\pi a^2}{2} \cos \omega t \tag{16}$$

Il massimo si ha per $\cos \omega t = 1$:

$$\Phi_{\max} = B \frac{\pi a^2}{2} \simeq 0.147 \text{ Wb} \tag{17}$$

2. La f.e.m. indotta vale

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = B \frac{\pi a^2}{2} \omega \sin \omega t \tag{18}$$

e la corrente

$$i = \frac{\varepsilon}{\mathcal{R}} = B \frac{\pi a^2}{2\mathcal{R}} \omega \sin \omega t \tag{19}$$

Il massimo si ha per $\sin \omega t = 1$:

$$i_{\max} = 0.368 \text{ A} \tag{20}$$

3. La potenza dissipata per effetto Joule è

$$P = \mathcal{R} i^2 = \frac{1}{\mathcal{R}} \left(\frac{B \pi a^2 \omega}{2} \right)^2 \sin^2 \omega t \tag{21}$$

Quindi la media su un periodo T è

$$<P> = \frac{1}{T} \int_0^T P dt = \frac{1}{\mathcal{R}} \left(\frac{B \pi a^2 \omega}{2} \right)^2 \frac{1}{T} \int_0^T \sin^2 \omega t \, dt \tag{22}$$

Ricordando che:

$$\frac{1}{T} \int_0^T \sin^2 \omega t \, dt = \frac{1}{2} \tag{23}$$

si ha

$$<P> = \frac{1}{2\mathcal{R}} \left(\frac{B \pi a^2 \omega}{2} \right)^2 \tag{24}$$

e l'energia dissipata nel periodo è

$$W = <P> T \simeq 0.17 \, J \tag{25}$$

4. La f.e.m. è dovuta alla forza di Lorentz, quindi non si sviluppa sul tratto di circuito fisso, bensì sul tratto semicircolare in rotazione, che equivale ad un generatore di f.e.m. sinusoidale. La differenza di potenziale tra M e N è uguale alla f.e.m. indotta (14) ovvero a $i\mathcal{R}$.