Fisica 2 - Scritto febbraio 2025

Esercizio 1

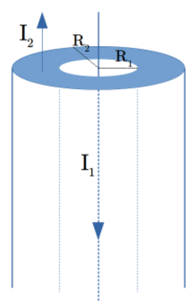
La cavità interna di guscio metallico sferico, di raggio interno $R_1 = 3$ cm e raggio esterno $R_2 = 8$ cm, è riempita con una densità di carica uniforme $\rho = 2 \times 10^{-4}$ C/m^3. La superficie esterna è collegata a terra. Calcolare:

1. la densità superficiale di carica presente sulle superfici interna ed esterna del guscio metallico; [**3 punti**]
2. il campo elettrostatico in tutto lo spazio e il potenziale al centro del sistema; [**5 punti**]
3. l'energia elettrostatica del sistema. [**3 punti**]

Esercizio 2

Un lungo conduttore cilindrico cavo ha raggio interno $R_1 = 10$ cm e raggio esterno $R_2 = 20$ cm, ed è percorso da una corrente $I_2 = 400$ mA uniformemente distribuita sulla sezione del conduttore. Inoltre nel suo asse si trova un filo rettilineo percorso da corrente $I_1 = 200$ mA che scorre nel verso opposto.

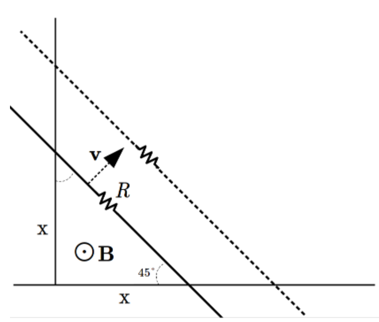
1. Determinare l'espressione del campo magnetico in tutto lo spazio. [**5 punti**]
2. Determinare se e dove $B = 0$. [**3 punti**]
3. Ripetere i calcoli se la corrente I_2, invece di essere uniforme sulla sezione, scorre solo sulla superficie esterna del cilindro. [**3 punti**]



Esercizio 3

Una lunga sbarra conduttrice, che porta una resistenza $R = 90\ \Omega$, poggia su due fili conduttori con resistenza nulla, formando un triangolo rettangolo isoscele come in figura. Il circuito è immerso in un campo magnetico uniforme $B = 40$ mT ortogonale al piano del circuito. Inizialmente si ha $x_0 = 50$ cm. La sbarra viene poi messa in moto con velocità costante $v = 5$ m/s.

1. Calcolare il flusso del campo magnetico attraverso il circuito all'istante iniziale. [**2 punti**]
2. Scrivere la corrente indotta nel circuito in funzione di x e calcolare il valore iniziale. (Suggerimento: dimostrare, per prima cosa, che la velocità con cui varia x è $dx/dt = \sqrt{2}\,v$) [**5 punti**]
3. Calcolare il lavoro fatto per muovere la sbarra dalla posizione iniziale fino a $x = 2x_0$. [**4 punti**]



Soluzione del primo esercizio:

1. Sulla superficie interna di raggio R_1 compare una carica indotta di segno opposto alla carica interna Q contenuta nella cavità, che vale

$$Q = \rho \frac{4}{3} \pi R_1^3 \tag{1}$$

Per la densità di carica si ha quindi

$$\sigma_1 = \frac{-Q}{4\pi R_1^2} = \frac{-\rho R_1}{3} = -2 \times 10^{-6}\ \mathrm{C/m^2} \tag{2}$$

La superficie esterna ha carica nulla in quanto collegata a terra.

$$\sigma_2 = 0 \tag{3}$$

2. Per la simmetria sferica, all'interno della cavità ($r < R_1$) il campo elettrico sarà radiale e funzione solo della distanza r dal centro: $\vec{E} = E(r)\hat{u}_r$. Possiamo quindi usare il teorema di Gauss prendendo una superficie sferica di raggio r:

$$4\pi r^2 E(r) = \frac{1}{\epsilon_0} Q_{\mathrm{int}}(r) = \frac{1}{\epsilon_0} \rho \frac{4}{3} \pi r^3 \tag{4}$$

e quindi

$$E(r < R_1) = \frac{\rho r}{3\epsilon_0} \tag{5}$$

Sulla superficie R_1 si ha la carica indotta $-Q$, quindi a distanze maggiori la carica totale interna è pari a zero (somma di Q e $-Q$ indotta). Allora il campo elettrico è sempre nullo:

$$E(r \geq R_1) = 0 \tag{6}$$

Per quanto riguarda il potenziale, possiamo notare che $V(R_1) = 0$ perché il guscio metallico è collegato a terra. Allora si può scrivere

$$V(0) = \int_0^{R_1} \vec{E} \cdot d\vec{r} = \int_0^{R_1} \frac{\rho r}{3\epsilon_0}\, dr = \frac{\rho R_1^2}{6\epsilon_0} = 3388\ \mathrm{V}. \tag{7}$$

4. L'energia elettrostatica del sistema si può calcolare, come sempre, in due modi: integrando la densità di energia $\frac{1}{2}\epsilon_0 E^2$ in tutto lo spazio opppure $\frac{1}{2}\rho V$ nel volume della sfera. Usando il primo metodo:

$$W = \int_0^{\infty} \frac{1}{2}\epsilon_0 E(r)^2\, 4\pi r^2\, dr = \frac{1}{2}\epsilon_0 \int_0^{R_1} \frac{\rho^2 r^2}{9\epsilon_0^2}\, 4\pi r^2\, dr = \frac{2\pi\rho^2}{9\epsilon_0} \int_0^{R_1} r^4\, dr = \frac{2\pi\rho^2 R_1^5}{45\epsilon_0} = 1.5 \times 10^{-5}\ \mathrm{J} \tag{8}$$

Soluzione del secondo esercizio:

1. Data la simmetria cilindrica, possiamo effettuare il calcolo usando il teorema di Ampère. Le linee lungo cui si esegue la circuitazione di $\vec{B}$ saranno circonferenze centrate sull'asse ($r = 0$).

Per $r < R_1$ l'unica corrente concatenata è I_1 e quindi

$$B(r < R_1) = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r} \tag{9}$$

Per $R_1 < r < R_2$ si deve calcolare la corrente concatenata dovuta al cilindro cavo.

$$I_c(R_1 < r < R_2) = \int_{R_1}^{r} j\ 2\pi r'\, dr' \tag{10}$$

dove la densità di corrente è

$$j = \frac{I_2}{\pi(R_2^2 - R_1^2)} \tag{11}$$

Quindi si ottiene

$$I_c(R_1 < r < R_2) = I_2 \frac{r^2 - R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \tag{12}$$

e il campo prodotto è

$$B_c(R_1 < r < R_2) = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi r} \frac{r^2 - R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \tag{13}$$

Questo va sommato al campo prodotto da I_1, tenendo conto però del verso opposto. In totale,

$$B(R_1 < r < R_2) = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r} - \frac{\mu_0 I_2}{2\pi r} \frac{r^2 - R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \tag{14}$$

Infine per $r > R_2$ la corrente concatenata è $I_1 - I_2$ e quindi si ha

$$B(r > R_2) = \frac{\mu_0 (I_1 - I_2)}{2\pi r} \tag{15}$$

2. $B(r)$ può annullarsi solo nel caso $R_1 < r < R_2$. Imponendo $B = 0$ nell'eq. 14 si trova:

$$\frac{\mu_0 I_1}{2\pi r} = \frac{\mu_0 I_2}{2\pi r} \frac{r^2 - R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \Rightarrow \frac{I_1}{I_2} = \frac{r^2 - R_1^2}{R_2^2 - R_1^2} \tag{16}$$

e infine si ricava

$$r_0 = \sqrt{\frac{I_1}{I_2}(R_2^2 - R_1^2) + R_1^2} = 15.8 \text{ cm} \tag{17}$$

3. Si ragiona in modo analogo al punto 1. Per $r < R_1$ e $r > R_2$ il calcolo è identico e valgono i risultati ottenuti sopra. Per $R_1 < r < R_2$ scompare il contributo B_c. Quindi in definitiva

$$B(r < R_2) = \frac{\mu_0 I_1}{2\pi r} \tag{18}$$

$$B(r > R_2) = \frac{\mu_0 (I_1 - I_2)}{2\pi r} \tag{19}$$

e il campo non è mai nullo.

Soluzione del terzo esercizio:

1. Il flusso del campo magnetico attraverso il circuito è dato dal prodotto

$$\Phi = BS = B\frac{x^2}{2} \tag{20}$$

e all'istante inziale

$$\Phi_0 = B\frac{x_0^2}{2} = 5 \times 10^{-3} \text{ Wb} \tag{21}$$

2. Se nel tempo t la sbarra percorre un tratto s in diagonale, x aumenta di un tratto pari a $\sqrt{2}\,s$. Quindi la velocità con cui varia x è uguale a $\sqrt{2}\,s/t = \sqrt{2}\,v$.

La fem indotta è

$$\varepsilon = -\frac{d\Phi}{dt} = -\frac{d}{dt}(B\frac{x^2}{2}) = -\frac{B}{2} \cdot 2x\frac{dx}{dt} = -Bx\sqrt{2}\,v. \tag{22}$$

La corrente è quindi in modulo:

$$i(x) = |\varepsilon|/R = \frac{B\sqrt{2}\,v}{R}x \tag{23}$$

e scorre in senso orario rispetto alla figura. All'istante iniziale,

$$i_0 = \frac{B\sqrt{2}\,v}{R}x_0 = 1.57 \text{ mA} \tag{24}$$

3. La potenza spesa è Ri^2 quindi il lavoro è

$$W = \int Ri^2\,dt = \int_{x_0}^{2x_0} Ri^2\,\frac{dx}{\sqrt{2}\,v} = \frac{2B^2vR}{\sqrt{2}}\int_{x_0}^{2x_0} x^2\,dx = \frac{2B^2v}{R\sqrt{2}}\frac{7}{3}x_0^3 = 3.67 \times 10^{-5} \text{ J} \tag{25}$$