Scritto - 5 Luglio 2021

Esercizio 1

Due punti materiali di massa m_1 ed m_2, vengono lasciati cadere all'istante $t = 0$ rispettivamente da una altezza h e $2h$ rispetto al piano orizzontale come mostrato in figura 1, dove $h = 1\,\mathrm{m}$. Calcolare:

- La velocita del punto materiale di massa m_1 immediatamente prima di toccare il piano orizzontale. (**3 punti**).
- L'istante $\tilde{t}$ in cui i due punti materiali vengono a contatto, supponendo che l'urto tra il punto materiale di massa m_1 ed il piano orizzontale sia istantaneo e totalmente elastico. (**7 punti**)

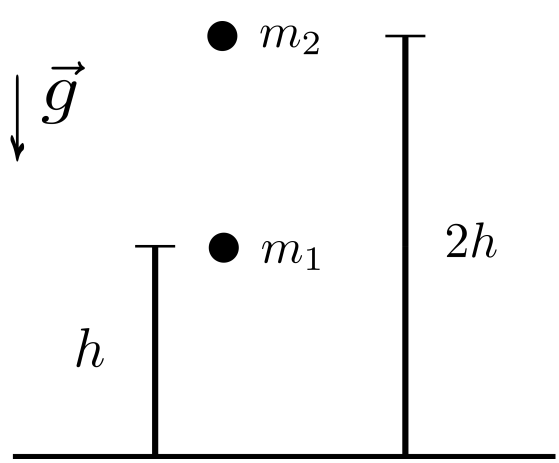

figura 1

Esercizio 2

Un disco omogeneo di raggio $R = 1\,\mathrm{m}$ e massa $m = 2\,\mathrm{kg}$ viene lanciato su un piano orizzontale al tempo $t = 0$. La velocita iniziale del centro di massa del disco vale $v_{cm}(t = 0) = 10\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ ed il disco ha a $t = 0$ soltanto un moto traslatorio ($\omega(t = 0) = 0$). Il coefficiente d'attrito dinamico tra disco e piano orizzontale vale $\mu_d = 0.2$. Determinare:

- Le forze agenti sul disco durante il successivo moto di rotolamento con strisciamento. (**2 punti**)
- L'accelerazione a_{cm} del centro di massa del disco e l'accelerazione angolare α del disco. (**6 punti**).
- Il tempo $\tilde{t}$ in cui si instaura il moto di rotolamento puro, ossia quando $\omega(\tilde{t})R = |v_{cm}(\tilde{t})|$. (**4 punti**).

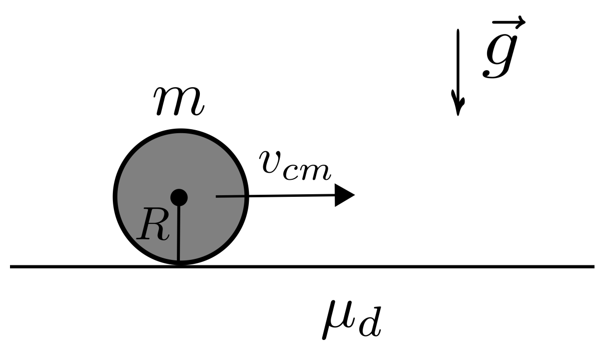

figura 2

Esercizio 3

Una mole di gas perfetto biatomico compie il ciclo termodinamico reversibile mostrato in figura 3. Le trasformazioni $A-B$ e $C-D$ sono isobare, mentre le trasformazioni $B-C$ e $D-A$ sono isocore. Sapendo che $p_A = 2 \times 10^5\,\mathrm{Pa}$, $p_D = 10^5\,\mathrm{Pa}$, $T_A = 300\,\mathrm{K}$, $T_B = 1200\,\mathrm{K}$, calcolare:

- Il calore Q_{AB} e Q_{BC} scambiato dal gas nelle trasformazioni $A-B$ e $B-C$. (**3 punti**)
- Il rendimento η del ciclo. (**4 punti**)
- Le variazione di entropia ΔS_{AB} e ΔS_{BC} del gas nelle trasformazioni $A-B$ e $B-C$. (**4 punti**).

($R = 8.314\,\mathrm{J\,K^{-1}\,mol^{-1}}$).

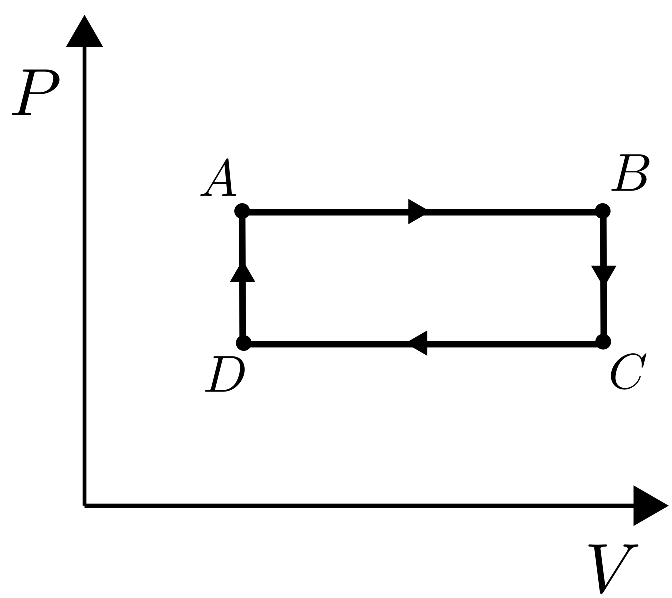

figura 3

Soluzione Esercizio 1

La velocità del punto materiale di massa m_1 nell'istante immediatamente precedente all'urto con il piano orizzontale si può trovare ad esempio dalla conservazione dell'energia:

$$\frac{1}{2}m_1 v^2 = m_1 g h \implies v = \sqrt{2gh} \simeq 4.43\,\mathrm{m\,s^{-1}}\ . \tag{1}$$

La velocità è chiaramente diretta verso il basso. il tempo t_1 che il punto materiale di massa m_1 impiega per raggiungere il piano orizzontale si trova invece da:

$$h = \frac{1}{2}g t_1^2 \implies t_1 = \sqrt{\frac{2h}{g}} \simeq 0.45\,\mathrm{s}\ . \tag{2}$$

Nello stesso intervallo di tempo t_1, il punto materiale di massa m_2 avrà raggiunto la quota h, dal momento che è stato lasciato cadere dalla quota $2h$.

Nell'ipotesi di urto istantaneo ed elastico tra la massa m_1 ed piano orizzontale, si ha che la velocità del punto materiale cambia istantaneamente verso nell'urto. Per trovare il tempo $\tilde{t}$ in cui i due punti materiali entrano in contatto, iniziamo scrivendo le loro leggi orarie per $t \geq t_1$

$$x_1(t) = v_1 \cdot (t - t_1) - \frac{1}{2}g(t - t_1)^2 \qquad (m_1), \tag{3}$$

$$x_2(t) = h - v_2 \cdot (t - t_1) - \frac{1}{2}g(t - t_1)^2 \qquad (m_2)\ . \tag{4}$$

Nello scrivere le equazioni precedenti, abbiamo scelto l'origine dell'asse verticale coincidente con la posizione del piano orizzontale, ed abbiamo orientato l'asse verticale verso l'alto. v_1 e v_2 sono i moduli delle velocità dei due punti materiali al tempo $t = t_1$, e sono entrambi dati da

$$v_1 = v_2 = v = \sqrt{2gh}\ . \tag{5}$$

Il tempo $\tilde{t}$ si ricava imponendo $x_1(\tilde{t}) = x_2(\tilde{t})$. Si ha pertanto:

$$2v(\tilde{t} - t_1) = h \implies \tilde{t} = t_1 + \frac{h}{2v} = \sqrt{\frac{2h}{g}} + \frac{1}{4}\sqrt{\frac{2h}{g}} = \frac{5}{4}\sqrt{\frac{2h}{g}} \simeq 0.56\,\mathrm{s}\ . \tag{6}$$

Soluzione Esercizio 2

Le forze agenti sul disco durante il rotolamento con strisciamento a $t > 0$, sono date dalla forza peso $|\vec{F}_p| = mg \simeq 19.6\,\mathrm{N}$ diretta verso il basso, la reazione vincolare $\vec{N}$ di modulo $|\vec{N}| = mg$ che bilancia la forza peso, e la forza d'attrito dinamico $F_d = -\mu_d|\vec{N}| \simeq -3.92\,\mathrm{N}$ che si oppone al moto.
Dal momento che a $t = 0$ il moto e' puramente traslazionale, il moto successivo sarà di rotolamento con strisciamento e la velocità del centro di massa v_{cm} e la velocità angolare ω saranno quantità disaccoppiate (finchè non verrà instaurato il moto di rotolamento puro).

L'accelerazione del centro di massa a_{cm} è data da

$$ma_{cm} = F_d = -\mu_d|\vec{N}| = -\mu_d mg \implies a_{cm} = -\mu_d g \sim -1.96\,\mathrm{m/s^2} \ , \qquad (7)$$

e corrisponde ad una decelerazione, mentre l'accelerazione angolare α del disco si trova dalla seconda equazione cardinale. Indicando con L il modulo del momento angolare del disco, calcolato scegliendo come polo il suo centro di massa, si ha

$$\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(I\omega) = I\frac{\partial \omega}{\partial t} = I\alpha = -RF_d = \mu_d Rmg \ , \qquad (8)$$

dove $I = \frac{1}{2}mR^2$ è il momento d'inerzia del disco. Si ha pertanto:

$$\alpha = \mu_d \frac{Rmg}{I} = \mu_d \frac{2g}{R} \simeq 3.92\,\mathrm{rad/s^2} \ . \qquad (9)$$

L'istante $\tilde{t}$ in cui si instaura il moto di rotolamento puro si ricava imponendo $|v_{cm}(\tilde{t})| = \omega(\tilde{t})R$. Al generico tempo t, in virtù delle equazioni precedenti, si ha:

$$v_{cm}(t) = v_{cm}(0) + a_{cm}t = v_{cm}(0) - \mu_d g t, \qquad \omega(t) = \alpha t = \frac{2\mu_d g}{R} t \ , \qquad (10)$$

pertanto:

$$|v_{cm}(\tilde{t})| = \omega(\tilde{t})R \implies \tilde{t} = \frac{v_{cm}(0)}{3\mu_d g} \simeq 1.70\,\mathrm{s} \ . \qquad (11)$$

Soluzione Esercizio 3

Il calore Q_{AB} assorbito nella isobara $A-B$ si ricava da:

$$Q_{AB} = nc_p(T_B - T_A) = n\frac{7}{2}R(T_B - T_A) \simeq 26\,189\,\mathrm{J}, \tag{12}$$

mentre il calore scambiato nella isocora $B-C$ è uguale alla variazione di energia interna del gas ed è dato da:

$$Q_{BC} = nc_v(T_C - T_B)\ . \tag{13}$$

La temperatura del gas in C vale $T_C = T_B/2$ dal momento che $V_B = V_C$ e che $p_C = p_B/2$. Pertanto:

$$Q_{BC} = -nR\frac{5}{2}\cdot\frac{T_B}{2} = -12\,471\,\mathrm{J}\ , \tag{14}$$

e durante questa trasformazione il gas cede calore. Inoltre, nella trasformazione $C-D$ il gas scambia il calore

$$Q_{CD} = nc_p(T_D - T_C)\ , \tag{15}$$

e la temperatura del gas in D, per le stesse considerazioni fatte prima per T_C, vale $T_D = T_A/2$. Si ha dunque

$$Q_{CD} = n\frac{7}{2}R\cdot\frac{(T_A - T_B)}{2} = -\frac{Q_{AB}}{2} \simeq -13\,095\,\mathrm{J}\ . \tag{16}$$

Infine il calore assorbito dal gas nella trasformazione $D-A$ è dato da:

$$Q_{DA} = nc_v(T_A - T_D) = nR\frac{5}{2}\frac{T_A}{2} \simeq 3118\,\mathrm{J}\ . \tag{17}$$

Il calore complessivamente assorbito dal gas è dato da:

$$Q_A = Q_{AB} + Q_{DA} \simeq 29\,307\,\mathrm{J}\ , \tag{18}$$

mentre il calore ceduto è:

$$Q_C = Q_{BC} + Q_{CD} \simeq -25\,566\,\mathrm{J}. \tag{19}$$

Il rendimento del ciclo è dunque

$$\eta = 1 - \frac{|Q_C|}{Q_A} \sim 0.128\ . \tag{20}$$

Infine le variazioni di entropia sono date da:

$$\begin{aligned}
\Delta S_{AB} &= nc_p\int_{T_A}^{T_B}\frac{dT}{T} = nc_p\ln\frac{T_B}{T_A} = nc_p\ln 4 \simeq 40.34\,\mathrm{J\,K^{-1}} \\
\Delta S_{BC} &= nc_v\int_{T_B}^{T_C}\frac{dT}{T} = nc_v\ln\frac{T_C}{T_B} = -nc_v\ln 2 \simeq -14.41\,\mathrm{J\,K^{-1}}
\end{aligned} \tag{21}$$