Secondo Esonero - 7 Giugno 2019

Soluzione Esercizio 1

Per calcolare l'accelerazione angolare del sistema dobbiamo considerare l'equazione del moto:

$$M_0 = I_0 \alpha \tag{1}$$

dove M_0 è il momento esplicato dal motore, I_0 il momento di inerzia (iniziale) del sistema e α la sua accelerazione angolare. Essendo il momento di inerzia una quantità additiva, il momento di inerzia totale del sistema sarà dato dalla somma dei momenti di inerzia dei singoli costituenti del sistema:

$$I_0 = \frac{1}{12} ML^2 + m\left(\frac{L}{4}\right)^2 + m\left(\frac{L}{4}\right)^2 = 0.1\ kg\ m^2 \tag{2}$$

L'accelerazione angolare del sistema sarà quindi data da:

$$\alpha = \frac{M_0}{I_0} = 2\ rad/s^2 \tag{3}$$

La velocità angolare massima che può sopportare il filo prima di spezzarsi può essere ricavata eguagliando la tensione massima alla forza centripeta delle masse m, che in questo caso si può scrivere come:

$$T_{max} = m\omega^2 \frac{L}{4} \tag{4}$$

Da cui si ricava:

$$\omega = \sqrt{\frac{4T_{max}}{mL}} = 30\ rad/s \tag{5}$$

Il tempo t^* in cui questa velocità viene raggiunta può essere ricavata dalle equazioni del moto uniformemente accelerato:

$$\omega = \alpha t^* \tag{6}$$

Da cui si ricava:

$$t^* = \frac{\omega}{\alpha} = 15\ s \tag{7}$$

Infine, per ricavare la velocità angolare all'istante in cui i due corpi raggiungono l'estremità dell'asta possiamo applicare la conservazione del momento angolare; dopo l'istante t^*, infatti, il momento esterno M_0 cessa di agire. Avremo allora:

$$I_0 \omega = I\omega' \tag{8}$$

dove I_0 è il momento di inerzia del sistema poco prima che il filo si spezza; ω la velocità angolare massima calcolata prima; I' il momento di inerzia del sistema quando le due masse si trovano all'estremità dell'asta; ω' la nuova velocità angolare raggiunta. Il momento di inerzia I' sarà dato da:

$$I' = \frac{1}{12} ML^2 + m\left(\frac{L}{2}\right)^2 + m\left(\frac{L}{2}\right)^2 = 0.25\ kg\ m^2 \tag{9}$$

Ma allora la velocità angolare ω' sarà data da:

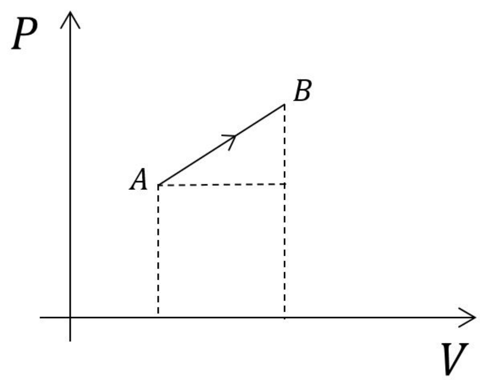
$$\omega' = \frac{I_0 \omega}{I'} = 12\ rad/s \tag{10}$$

Soluzione Esercizio 2

Il calore scambiato nel corso della trasformazione può essere ricavato dal primo principio della termodinamica:

$$Q_{AB} = L_{AB} + \Delta U_{AB} \tag{11}$$

Il lavoro prodotto nel corso della trasformazione può essere calcolato facilmente tenendo conto che la trasformazione AB può essere rappresentata nel piano $P - V$ come una retta di pendenza generica:



Quindi il lavoro sarà l'area sottesa dalla retta:

$$L_{AB} = \frac{(V_B - V_A)(P_B - P_A)}{2} + (V_B - V_A)P_A = 21273 \text{ J} \tag{12}$$

La variazione di energia interna sarà invece data dalla solita formula:

$$\Delta U_{AB} = nc_V(T_B - T_A) \tag{13}$$

dove, essendo il gas biatomico, $c_V = 5/2\ R$, mentre le temperature possono essere ricavate dall'equazione di stato dei gas perfetti:

$$T_A = \frac{P_A V_A}{nR} = 243.9 \text{ K} \qquad T_B = \frac{P_B V_B}{nR} = 1626 \text{ K} \tag{14}$$

Avremo allora:

$$\Delta U_{AB} = 86139 \text{ J} \tag{15}$$

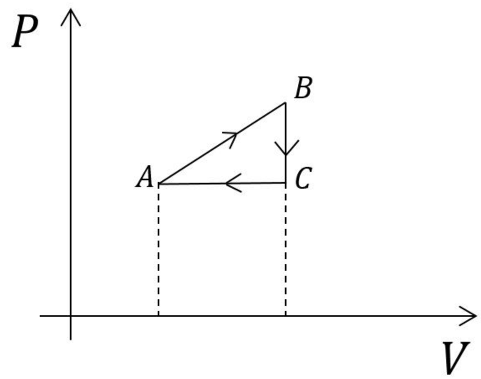
Il calore scambiato dal gas nella trasformazione AB sarà allora:

$$Q_{AB} = 107412 \text{ J} \tag{16}$$

Per calcolare l'entropia utilizziamo la definizione:

$$\Delta S_{AB} = \int_A^B \frac{dQ}{T} = \int_A^B \frac{pdV}{T} + \int_A^B nc_V \frac{dT}{T} = \int_A^B \frac{nRT}{VT} + \int_A^B nc_V \frac{dT}{T} = nR \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right) + nc_V \ln\left(\frac{T_B}{T_A}\right) = 148.01 \text{ J} \tag{17}$$

Per quanto riguarda il ciclo, esso può essere rappresentato nel piano $P - V$ come in figura:



Lo stato C sarà allora caratterizzato dalle seguenti variabili termodinamiche:

$$V_B, P_A, T_C = \frac{V_B P_A}{nR} = 813 \text{ K} \tag{18}$$

Il rendimento del ciclo è dato dal rapporto tra il lavoro compiuto dal sistema e il calore assorbito nel corso del ciclo:

$$\eta = \frac{L}{Q_{ass}} \tag{19}$$

Il lavoro sarà l'area sottesa dalla curva chiusa che rappresenta il ciclo:

$$L = \frac{(V_B - V_A)(P_B - P_A)}{2} + (V_B - V_A)P_A - (V_B - V_A)P_A = 7091 \text{ J} \tag{20}$$

Per calcolare il calore assorbito durante il ciclo, consideriamo le singole trasformazioni:

- Trasformazione BC (isocora)

$$Q_{BC} = \Delta U_{BC} = nc_V(T_C - T_B) = -50670.22 \text{ J} \quad (\textit{calore ceduto}) \tag{21}$$

- Trasformazione CA (isobara)

$$Q_{CA} = L_{CA} + \Delta U_{CA} = (V_A - V_B)P_A + nc_V(T_A - T_C) = -49469 \text{ J} \quad (\textit{calore ceduto}) \tag{22}$$

Il calore assorbito sarà allora solo quello del tratto AB. Il rendimento del ciclo sarà quindi dato da:

$$\eta = \frac{L}{Q_{AB}} = 0.066 \tag{23}$$