Secondo esonero - 8 Giugno 2021

Esercizio 1

Un disco omogeneo di massa $m = 10\,\mathrm{kg}$ e raggio $R = 1\,\mathrm{m}$ rotola senza strisciare su un piano inclinato di un angolo $\theta = 30°$ rispetto al piano orizzontale, come indicato in figura 1. Al centro di massa del disco è applicata una forza costante $F = 20\,\mathrm{N}$ diretta lungo il piano inclinato. Il disco si trova inizialmente in quiete.

- Disegnare le forze agenti sul disco. (**2 punti**)
- Calcolare l'accelerazione a del centro di massa del disco ed il valore della forza d'attrito statico f_s. (**7 punti**)
- Determinare la velocità angolare ω del disco dopo che è stata percorsa una distanza $d = 10\,\mathrm{m}$ lungo il piano inclinato. (**6 punti**)

(Bonus) Supponiamo ora che il modulo della forza esterna F aumenti linearmente nel tempo secondo $F = F_0 + a_0 t$, con $F_0 = 20\,\mathrm{N}$ e $a_0 = 5\,\mathrm{N\,s^{-1}}$.

- A partire da quale tempo $\tilde{t}$ il moto di rotolamento puro non può essere più sostenuto dal sistema se il coefficiente d'attrito statico vale $\mu_s = 0.45$? (**3 punti**)

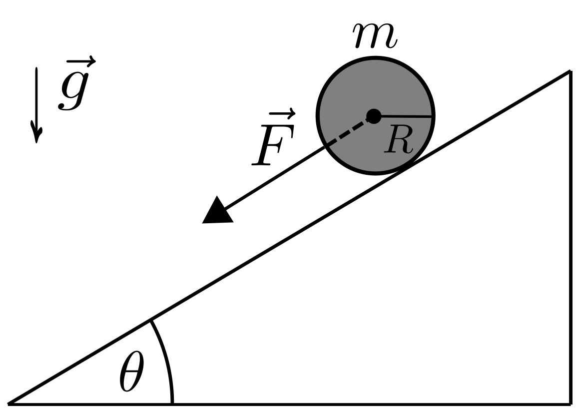

figura 1

Esercizio 2

Due moli di gas perfetto biatomico compiono un ciclo termodinamico costituito dalle seguenti tre trasformazioni:

1. Espansione isobara irreversibile $A - B$ in cui il volume del gas passa da V_A a $V_B = 2V_A$.
2. Trasformazione isocora reversibile $B - C$.
3. Trasformazione isoterma reversibile $C - A$ a temperatura $T_C = 300\,\mathrm{K}$.

La trasformazione irreversibile $A - B$ avviene mettendo il gas nello stato A in contatto con una sorgente a temperatura $2T_C$. Il diagramma $P - V$ del ciclo è mostrato in figura 2. Calcolare:

- Il calore Q_{AB} scambiato dal gas con la sorgente nella trasformazione irreversibile $A - B$. (**5 punti**)
- Il rendimento η del ciclo. (**5 punti**)
- La variazione di entropia ΔS_{AB} del gas e la variazione di entropia dell'universo $\Delta S_{AB}^{univ.} = \Delta S_{AB} + \Delta S_{AB}^{sorg.}$ nella trasformazione $A - B$. (**5 punti**)

($R = 8.314\,\mathrm{J\,K^{-1}\,mol^{-1}}$).

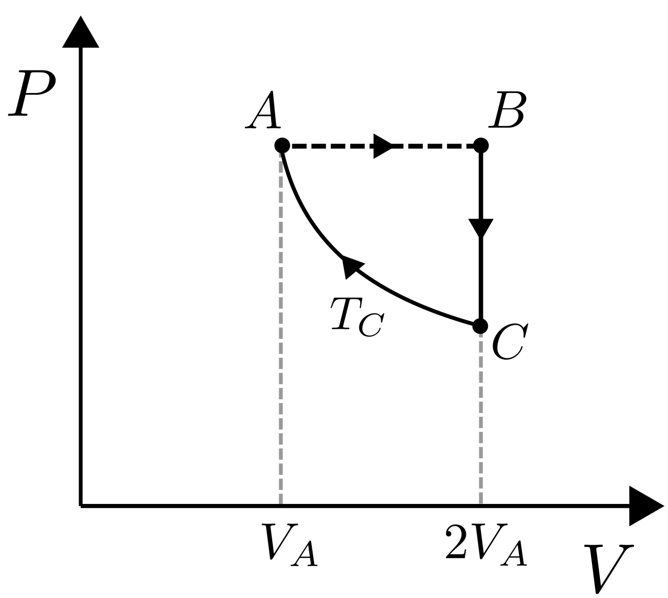

figura 2

Soluzione Esercizio 1

Indichiamo con a l'accelerazione del sistema (diretta lungo il piano inclinato) e con f_s il modulo della forza d'attrito. Si ha:

$$ma = mg\sin\theta + F - f_s \ . \tag{1}$$

La forza di attrito statico f_s si determina dalla condizione di rotolamento puro. Il momento d'inerzia di un disco omogeneo di massa m e raggio R, in rotazione rispetto ad un asse ortogonale al piano del disco e passante per il suo centro di massa, è dato da $I = \frac{1}{2}mR^2$. Pertanto, indicando con L il (modulo del) momento angolare del disco calcolato scegliendo come polo il suo centro di massa e con ω ed α rispettivamente la velocità e l'accelerazione angolare del disco, si ha

$$\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}(I\omega) = I\frac{\partial \omega}{\partial t} = I\alpha = \frac{I}{R}a = f_s R \ , \tag{2}$$

dove abbiamo imposto la condizione di rotolamento puro $\alpha = a/R$ e usato il fatto che l'unica forza esterna ad avere un momento torcente non nullo rispetto al centro di massa del disco è la forza d'attrito statico. L' equazione precedente implica che

$$f_s = \frac{1}{2}ma \ . \tag{3}$$

Sostituendo in equazione [1] l'espressione appena trovata per f_s si ha:

$$\frac{3}{2}ma = mg\sin\theta + F \implies a = \frac{2}{3}g\sin\theta + \frac{2F}{3m} \ . \tag{4}$$

Inserendo i dati del problema si ottiene $a = 4.6\,\mathrm{m/s^2}$, mentre per la forza d'attrito statico si ha:

$$f_s = \frac{1}{2}ma = 23\,\mathrm{N} \ . \tag{5}$$

Per calcolare la velocità angolare ω del disco dopo che è stata percorsa una distanza $d = 10\,\mathrm{m}$ lungo il piano inclinato, possiamo ad esempio utilizzare il fatto che la variazione di energia (cinetica più potenziale gravitazione) deve essere uguale al lavoro svolto dalla forza F. Essendo il sistema inizialmente in quiete, la variazione di energia cinetica è data da:

$$\begin{aligned}\Delta E_{kin.} &= E^f_{kin.} - E^i_{kin.} = \frac{1}{2}mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 \\ &= \frac{1}{2}m\omega^2R^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = \frac{1}{2}(I + mR^2)\,\omega^2 \ .\end{aligned} \tag{6}$$

Nella precedente equazione si è usato il fatto che per un moto di rotolamento puro $v_{cm} = \omega R$. La variazione di energia potenziale gravitazionale è invece data da:

$$\Delta E_{grav.} = E^f_{grav.} - E^i_{grav.} = -mg\Delta h \ , \tag{7}$$

dove $\Delta h = d \sin\theta$ è la variazione di altezza del centro di massa. Dovendo essere:

$$\Delta E_{kin.} + \Delta E_{grav.} = \mathcal{L}_{ext.} = Fd \ , \tag{8}$$

si ha:

$$\omega^2 = \frac{2d}{mR^2 + I} \cdot [mg\sin\theta + F] = \frac{4d}{3R^2} \cdot \left[g\sin\theta + \frac{F}{m} \right] \ , \tag{9}$$

e dunque

$$\omega = \sqrt{\frac{4d}{3R^2} \cdot \left(g\sin\theta + \frac{F}{m} \right)} \sim \ 9.59\,\mathrm{rad\,s^{-1}}. \tag{10}$$

In maniera più semplice si poteva utilizzare il fatto che essendo il moto uniformemente accelerato, la velocità v_{cm} è legata allo spazio percorso d tramite $v_{cm} = \sqrt{2ad}$ e quindi $\omega = \frac{1}{R}\sqrt{2ad}$.
Per rispondere all'ultima domanda ricordiamo che il rotolamento puro è consentito fintanto che

$$f_s = \frac{1}{2} ma \leq \mu_s |\vec{N}| = \mu_s mg\cos\theta \ . \tag{11}$$

Pertanto, facendo uso dell'equazione [4] si ha che la forza massima F_{max} per cui il rotolamento puro è permesso è data da:

$$\frac{1}{2} ma = \frac{1}{2} m \cdot \left[\frac{2}{3} g\sin\theta + \frac{2F_{max}}{3m} \right] = \mu_s mg\cos\theta$$

$$\Longrightarrow \ F_{max} = 3\mu_s mg\cos\theta - mg\sin\theta \ . \tag{12}$$

Nel nostro caso abbiamo che la forza esterna aumenta linearmente nel tempo secondo $F(t) = F_0 + a_0 t$. Il tempo $\tilde{t}$ a partire dal quale il rotolamento puro non può essere più sostenuto dal sistema è dato dunque da:

$$\tilde{t} = \frac{1}{a_0} \cdot [3\mu_s mg\cos\theta - mg\sin\theta - F_0] \sim 9.115\,\mathrm{s} \ . \tag{13}$$

Soluzione Esercizio 2

Innanzitutto ricaviamo la pressione, il volume e temperatura del gas nei punti A, B e C, in funzione di V_A e T_C. Il problema ci dice che $V_B = 2V_A$ e che $n = 2$. Dall'equazione di stato dei gas perfetti sappiamo che

$$p_A = \frac{nRT_C}{V_A} \ . \tag{14}$$

Inoltre essendo $p_B = p_A$ abbiamo che la temperatura in B é data da

$$T_B = \frac{p_A \cdot 2V_A}{nR} \implies T_B = 2T_C \ . \tag{15}$$

Infine, la pressione nel punto C, essendo $V_C = V_B = 2V_A$, è data da

$$p_C = \frac{nRT_C}{2V_A} \implies p_C = \frac{p_A}{2} \ . \tag{16}$$

La quantità di calore assorbito nella trasformazione isobara irreversibile si ricava dal primo principio della termodinamica

$$\begin{aligned} Q_{AB} &= \Delta U_{AB} + p_A(V_B - V_A) = nc_V \cdot (T_B - T_A) + p_A \cdot (V_B - V_A) \\ &= nc_V T_C + p_A V_A = nc_V T_C + nRT_C = nc_P T_C \ , \end{aligned} \tag{17}$$

e per un gas perfetto biatomico il calore specifico molare a volume costante è dato da $c_V = \frac{5}{2}R$ (dunque $c_P = \frac{7}{2}R$). Inserendo i dati del problema si ha $Q_{AB} = 17\,459\,\mathrm{J}$. Nelle trasformazioni reversibili $B - C$ e $C - A$ il gas cede calore. Il calore Q_{BC} ceduto nella trasformazione isocora $B - C$ si ricava da $(dV = 0)$

$$Q_{BC} = \Delta U_{BC} = nc_V \cdot (T_C - T_B) = -nc_V T_C \sim -12\,471\,\mathrm{J} \ . \tag{18}$$

Mentre il calore Q_{CA} ceduto nella isoterma $C - A$ si ricava da (la variazione di energia interna ΔU_{CA} è nulla)

$$Q_{CA} = \int_C^A p\, dV = nRT_C \int_{V_C}^{V_A} \frac{1}{V} dV = nRT_C \ln \frac{V_A}{V_C} = -nRT_C \ln 2 \sim -3458\,\mathrm{J} \ . \tag{19}$$

Il calore Q_A assorbito dal gas nel ciclo è allora uguale a Q_{AB}, mentre il calore ceduto Q_C è dato da

$$Q_C = Q_{BC} + Q_{CA} \ . \tag{20}$$

Il rendimento del ciclo è pertanto uguale a

$$\eta = 1 - \frac{|Q_C|}{Q_A} = 1 + \frac{Q_{BC} + Q_{CA}}{Q_{AB}} \sim 0.088 \ . \tag{21}$$

Per calcolare la variazione di entropia ΔS_{AB} nella trasformazione $A - B$, dobbiamo calcolare $\int_A^B \frac{dQ}{T}$ lungo una isobara reversibile tra A e B. Per un gas ideale si ha che la variazione di entropia in una trasformazione reversibile infinitesima è data da

$$dS = \frac{dQ}{T} = \frac{dU}{T} + \frac{p}{T} dV = nc_V \frac{dT}{T} + nR \frac{dV}{V} \ . \tag{22}$$

In una isobara si ha inoltre $dV/V = dT/T$, pertanto

$$dS = (nc_V + nR) \frac{dT}{T} = nc_p \frac{dT}{T} \ , \tag{23}$$

ed integrando tra gli stati A e B si ha

$$\Delta S_{AB} = nc_p \ln \frac{T_B}{T_A} = nc_p \ln 2 \sim 40.34 \,\mathrm{J\,K^{-1}} \ . \tag{24}$$

La variazione di entropia $\Delta S_{AB}^{sorg.}$ della sorgente a temperatura $2T_C$ è invece data da

$$\Delta S_{AB}^{sorg.} = -\frac{Q_{AB}}{2T_C} = -\frac{nc_p}{2} \sim -29.10 \,\mathrm{J\,K^{-1}} \ , \tag{25}$$

pertanto la variazione di entropia dell'universo è

$$\Delta S_{AB}^{univ.} = \Delta S_{AB} + \Delta S_{AB}^{sorg.} = nc_p \cdot (\ln 2 - \frac{1}{2}) \sim 11.24 \,\mathrm{J\,K^{-1}} > 0 \ . \tag{26}$$