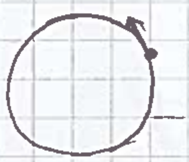
SECONDA ESERCITAZIONE ANNO ACCADEMICO 2022/2023

ESERCIZIO 1

Un disco di raggio R = 16 cm ruota con velocità angolare costante compiendo 33 giri al minuto. Calcolare la velocità angolare, il periodo e la frequenza del moto, la velocità e l'accelerazione di un punto sul bordo.



$$R = 16\ cm = 0.16\ m$$

$$\nu = 33\ giri/minuto = \frac{33\ giri}{60\ s} = 0.55\ s^{-1} = 0.55\ Hz$$

Dobbiamo calcolare:

ω = velocità angolare $\quad \nu$ = frequenza $\quad T$ = periodo

Abbiamo immediatamente:

$$\nu = \frac{1}{T} \Rightarrow T = \frac{1}{\nu} = \frac{1}{0.55\ s^{-1}} = 1.82\ s$$

E inoltre:

$$\omega = 2\pi\nu = 3.46\ rad/s$$

La velocità di un punto sul bordo non è che:

$$v_{BORDO} = \omega R = (3.46\ rad/s)(0.16\ m) = $$
$$= 0.55\ m/s$$

mentre l'accelerazione sarà:

$$a_{BORDO} = \omega^2 R = \frac{v^2}{R} = \frac{(0.55\ m/s)^2}{0.16\ m} = 1.9\ m/s^2$$

ESERCIZIO 2

Un punto che si muove di moto armonico con periodo T = 0.9 s si trova al tempo t = 0 in x = 0.292 m con velocità v = 0.945 m/s. Calcolare:

- l'ampiezza del moto
- la velocità massima
- l'accelerazione massima

Le leggi orarie del moto in questo caso sono:

$$x(t) = A\,sen(\omega t + \phi) \quad , \quad v(t) = \omega A \cos(\omega t + \phi)$$

con A ampiezza, ϕ fase e ω pulsazione, che qui vale:

$$\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi\ rad}{0.9\ s} = 7\ rad/s$$

Conosciamo poi le condizioni iniziali:

$$x(t=0) = A \operatorname{sen}\phi, \qquad v(t=0) = \omega A \cos\phi$$

Mettiamo a sistema per ricavare A. Sappiamo che vale

$$\operatorname{sen}^2\phi + \cos^2\phi = 1$$

Ma allora:

$$x^2(t=0) = A^2 \operatorname{sen}^2\phi$$

$$v^2(t=0) = \omega^2 A^2 \cos^2\phi \implies \frac{v^2}{\omega^2} = A^2\cos^2\phi$$

Da cui:

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{v^2}{\omega^2 A^2} = \operatorname{sen}^2\phi + \cos^2\phi = 1$$

Ma allora:

$$x^2(t=0) + \frac{v^2(t=0)}{\omega^2} = A^2$$

Quindi:

$$A = 0.322\ m$$

Questa e' l' ampiezza del moto.
La velocità massima si avrà quando $\cos\phi = 1$, cioe' per $\phi = 0$:

$$v_{MAS} = \omega A = (7\ rad/s)(0.322\ m) =$$
$$= 2.252\ m/s$$

L'accelerazione invece si ottiene come derivata prima della velocità sul tempo:

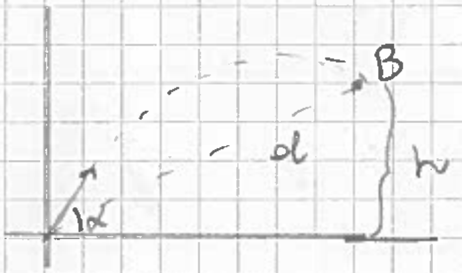
$$a(t) = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt}\left[\omega A \cos(\omega t + \phi)\right] =$$
$$= -\omega^2 A \operatorname{sen}(\omega t + \phi)$$

Essa raggiunge il valore massimo quando il seno e' -1.
In tal caso avremo:

$$a_{MAX} = \omega^2 A = 15.76\ m/s^2$$

ESERCIZIO 3

Un cannone spara proiettili con velocità iniziale $v_0 = 300$ m/s, che devono colpire un bersaglio situato su una montagna all'altezza di 1000 m. La distanza in linea d'aria tra cannone e bersaglio è 5×10^3 m. Calcolare l'angolo di tiro.



$h = 1000$ m

$d = 5000$ m

$v_0 = 300$ m/s

Scriviamo le equazioni del moto. Il proiettile farà un moto rettilineo uniforme lungo x (visto che non subisce accelerazioni) e uniformemente accelerato lungo y (visto che risente dell'accelerazione di gravità g):

$$\begin{cases} x(t) = vt = v_{0x} t \\ y(t) = v_{0y} t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

(il proiettile parte da 0)

Queste v_{0x} e v_{0y} sono i componenti di v_0 lungo x e y, e dipenderanno dall'angolo di tiro α:

$$\begin{cases} v_{0x} = v_0 \cos\alpha \\ v_{0y} = v_0 \,\mathrm{sen}\,\alpha \end{cases}$$

Quindi

$$\begin{cases} x(t) = (v_0 \cos\alpha) t \\ y(t) = (v_0 \,\mathrm{sen}\,\alpha) t - \frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

Noi abbiamo una condizione su h e d, quindi liberiamoci della variabile tempo:

$$t = \frac{x}{v_0 \cos\alpha}$$

E sostituiamola nell'altra equazione:

$$y = \frac{x \cancel{v_0} \,\mathrm{sen}\,\alpha}{\cancel{v_0} \cos\alpha} - \frac{1}{2} g \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2\alpha}$$

Da cui:

$$y = x \,\mathrm{tg}\,\alpha - g \frac{x^2}{2 v_0^2 \cos^2\alpha}$$

Conviene riscrivere le funzioni trigonometriche come una sola, quindi esprimo il $\cos\alpha$ in termini di $\mathrm{tg}\,\alpha$.

posso sfruttare:

$$\operatorname{sen}^2\alpha + \cos^2\alpha = 1 \quad ; \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{\operatorname{sen}\alpha}{\cos\alpha}$$

Da quest'ultima ricavo:

$$\operatorname{tg}^2\alpha = \frac{\operatorname{sen}^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1-\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha} = \frac{1}{\cos^2\alpha} - 1$$

Ovvero:

$$\frac{1}{\cos^2\alpha} = 1 + \operatorname{tg}^2\alpha$$

Ma allora:

$$y = x\operatorname{tg}\alpha - g\frac{x^2}{2v_0^2}\left(1 + \operatorname{tg}^2\alpha\right)$$

E infine:

$$y = x\operatorname{tg}\alpha - \frac{g x^2}{2v_0^2} - g\frac{x^2}{2v_0^2}\operatorname{tg}^2\alpha$$

Questa è l'equazione della parabola che descrive la traiettoria del proiettile. Posso imporre che essa deve passare per il bersaglio (che chiamo B):

$$x_B = \sqrt{d^2-h^2} = \sqrt{(5000\ m)^2 - (1000\ m)^2} =$$

$$= 4.9 \times 10^3\ m$$

$$y_B = h = 1 \times 10^3\ m$$

Quindi ho:

$$-g\frac{x_B^2}{2v_0^2}\operatorname{tg}^2\alpha + x_B\operatorname{tg}\alpha - \left(\frac{g x_B^2}{2v_0^2} + y_B\right) = 0$$

Ho un'equazione di secondo grado, che ammette due soluzioni A PATTO CHE il discriminante (b^2-4ac) sia positivo (altrimenti non ho soluzione reale - il che vuol dire che il punto B non può far parte della parabola e quindi il bersaglio non viene colpito.

Riscriviamo l'equazione in modo più compatto:

$$-g\frac{x_B^2}{2v_0^2}\left(\operatorname{tg}^2\alpha - \frac{2v_0^2}{g x_B}\operatorname{tg}\alpha + \frac{2v_0^2 y_B}{g x_B^2} + 1\right) = 0$$

Da cui:

$$\operatorname{tg}\alpha_{1,2} = \frac{v_0^2}{g x_B} \mp \sqrt{\frac{v_0^4}{g^2 x_B^2} - \frac{2v_0^2 y_B}{g x_B^2} - 1} =$$

$$= \frac{v_0^2 \mp \sqrt{v_0^4 - g\left(2v_0^2 y_B + g x_B^2\right)}}{g x_B}$$

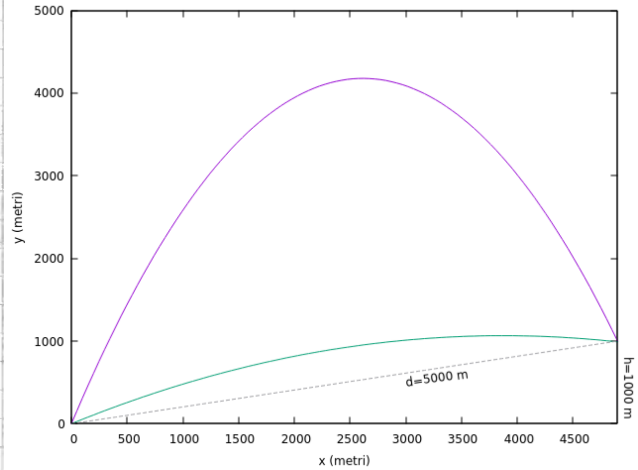
Inserendo i valori numerici otteniamo:

$\alpha_1 = 28.8$ gradi, $\alpha_2 = 72.6$ gradi

Se il discriminante fosse zero, avrei avuto un'unica soluzione data da:

$$x_{1,2} = -\frac{b}{2a} \longrightarrow tg\alpha = \frac{v_0^2}{g x_B}$$

Le due soluzioni trovate prima equivalgono a due possibilità di tiro:



ESERCIZIO 4

Due masse m_1 e m_2 sono disposte come in figura su un piano inclinato liscio di 30°. Alla massa m_1 è applicata una forza costante F diretta parallelamente al piano inclinato verso l'alto. Sapendo che il filo sopporta una tensione massima di 30N e che la forza massima che si può applicare purché il filo non si spezzi è di 100N. Calcolare il valore di m_2 se $m_1 = 3.5\,Kg$ e l'accelerazione massima.

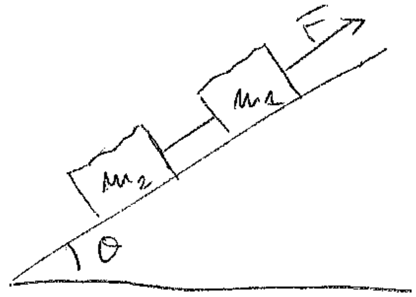
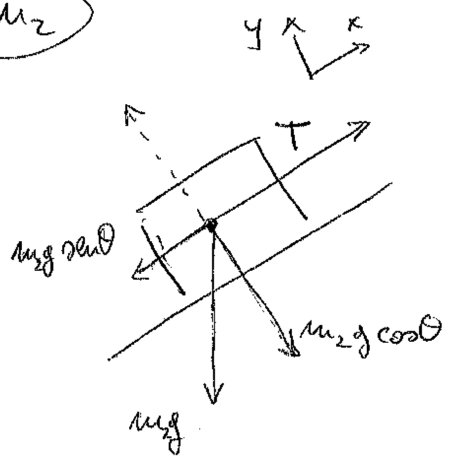
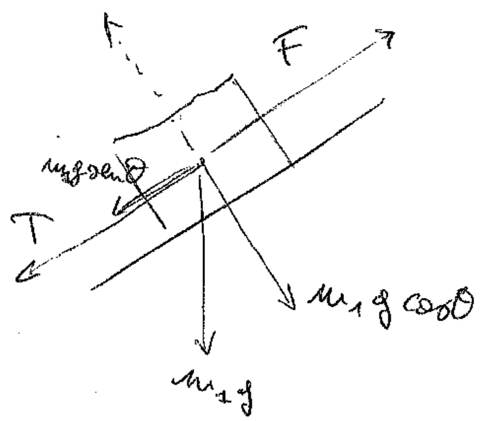


Diagramma delle forze per m_1 e m_2

m_2



m_1



Scrivo le eq. del moto per le due masse:

m_1 $\qquad m_1 a = F - m_1 g \operatorname{sen}\theta - T$

m_2 $\qquad m_2 a = T - m_2 g \operatorname{sen}\theta$

Esplicito T dalla 2° eq.

$$T = m_2 a + m_2 g \,\text{sen}\,\theta$$

e sostituisco nella 1° eq

$$m_1 a = F - m g \,\text{sen}\,\theta - m_2 a - m_2 g \,\text{sen}\,\theta$$

$$a = \frac{F - g \,\text{sen}\,\theta (m_1 + m_2)}{m_1 + m_2}$$

$$a = \frac{F}{m_1 + m_2} - g \,\text{sen}\,\theta$$

Di conseguenza

$$T = \frac{m_2}{m_1 + m_2} F \cancel{- g m_2 \,\text{sen}\,\theta} \cancel{+ m_2 g \,\text{sen}\,\theta}$$

Ottenuta la relazione tra la forza esterna applicata e la tensione ricordiamo che:

- 100 N è la forza massima affinché il filo non si spezzi
- 30 N è la tensione massima che il filo può sopportare prima di spezzarsi

Pertanto esplicitando m_2 si ottiene

$$m_1 T_{max} + m_2 T_{max} = m_2 F_{max}$$

$$m_2 = \frac{m_1 T_{max}}{F_{max} - T_{max}}$$

Sostituendo i valori numerici

$$m_2 = \frac{3.5\,kg \; 30\,N}{\cancel{7}0\,N} = \frac{\cancel{7}}{2}\frac{3}{\cancel{7}}\,kg = 1.5\,Kg$$

$$a = \frac{F}{m_1 + m_2} - g\,sen\theta = 15.1\,m/s^2$$