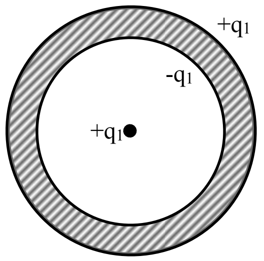
Prova Scritta - appello straordinario

SOLUZIONE ESERCIZIO 1

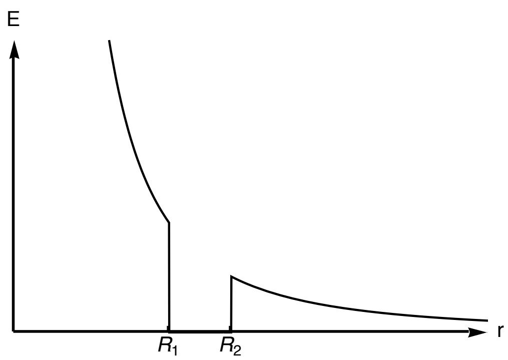
A causa del fenomeno di induzione le cariche si distribuiranno nel modo seguente



Il campo elettrico si ricava nelle tre regioni sfruttando il teorema di Gauss. Si ottiene pertanto

$$E\left(r\right)=\begin{cases}\frac{q_1}{4\pi r^2\varepsilon_0} & 0\leq r\leq R_1\\ 0 & R_1\leq r\leq R_2\\ \frac{q_1}{4\pi r^2\varepsilon_0} & r\geq R_2\end{cases}\tag{1}$$

È anche possibile, a questo punto, disegnare l'andamento del modulo del campo elettrico in funzione di r che assume la forma seguente



Occupiamoci ora del calcolo del potenziale assumendo, come al solito, che si annulli per $r=\infty$. Sia

$$\Delta V\left(r\right)=V\left(r\right)-V\left(\infty\right)\tag{2}$$

per valori di r minori di R_1 avremo quindi

$$\Delta V\left(r\right)=V\left(r\right)-V\left(\infty\right)=\int_r^{\infty}\vec{E}\cdot d\vec{s}\tag{3}$$

$$=\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0}\int_r^{R_1}\frac{dr}{r^2}+\int_{R_1}^{R_2}0\cdot ds+\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{R_2}^{\infty}\frac{dr}{r^2}\tag{4}$$

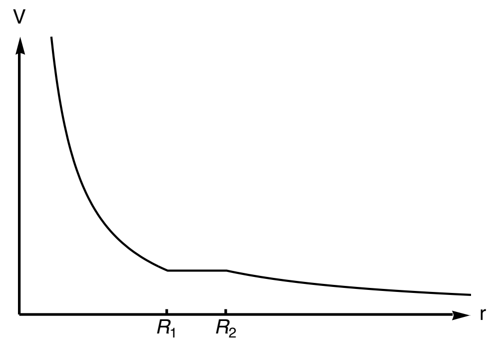
Pertanto avremo

$$V(r<R_1)=\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r}-\frac{1}{R_1}\right)+\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{R_2}\right)\tag{5}$$

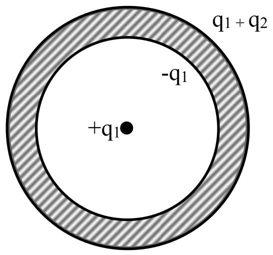
Analogamente possiamo ricavare il campo all'interno del conduttore, che risulterà costante, e per $r > R_2$. Riassumendo, l'espressione del potenziale in tutto lo spazio sarà

$$V(r) = \begin{cases} \frac{q_1}{4\pi r\varepsilon_0} - \frac{q_1}{4\pi R_1\varepsilon_0} + \frac{q_1}{4\pi R_2\varepsilon_0} & 0 \leq r \leq R_1 \\ \frac{q_1}{4\pi R_2\varepsilon_0} & R_1 \leq r \leq R_2 \\ \frac{q_1}{4\pi r\varepsilon_0} & r \geq R_2 \end{cases} \tag{6}$$

Anche in questo caso possiamo visualizzare schematicamente l'andamento in funzione di r, come mostrato in figura

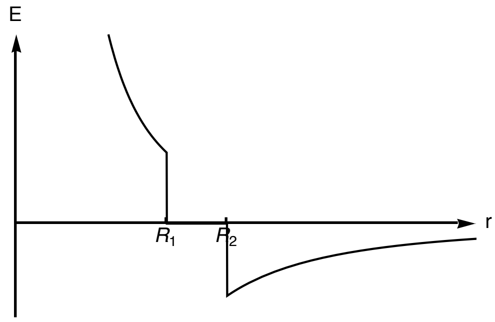


Se carichiamo il conduttore cavo con carica $q_2 = -3q_1$, la nuova configurazione con cui le cariche si distribuiranno sarà



Alla luce della nuova distribuzione delle cariche il campo elettrico resterà invariato per $r < R_2$ mentre per $r > R_2$ sarà

$$E(r) = \begin{cases} \frac{q_1}{4\pi r^2\varepsilon_0} & 0 \leq r \leq R_1 \\ 0 & R_1 \leq r \leq R_2 \\ -\frac{q_1}{2\pi r^2\varepsilon_0} & r \geq R_2 \end{cases} \tag{7}$$



SOLUZIONE ESERCIZIO 2

Per la simmetria cilindrica le linee di forza del campo magnetico sono delle circonferenze concentriche al conduttore e B è tangente ad esse. Applichiamo quindi il teorema di Ampere su una circonferenza di raggio r e distinguiamo tre diversi casi Per $r < b$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint Bdl = 0 \tag{8}$$

perchè è nulla la corrente concatenata. Avremo quindi

$$B = 0 \tag{9}$$

Per $b < r < a$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint Bdl = \mu_0 I_{conc} \tag{10}$$

I_{conc} si ricava moltiplicando la densità di corrente per la superficie della sezione del conduttore complresa nel cerchio di raggio r. In formule

$$I_{conc} = \frac{I_0}{\pi a^2 - \pi b^2} \left(\pi r^2 - \pi b^2\right) = I_0 \frac{r^2 - b^2}{a^2 - b^2} \tag{11}$$

$$\oint Bdl = 2\pi r B\left(r\right) = \mu_0 I_0 \frac{r^2 - b^2}{a^2 - b^2} \tag{12}$$

$$B\left(r\right) = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi r} \frac{r^2 - b^2}{a^2 - b^2} \tag{13}$$

Per $r > a$

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 I_{conc} = \mu_0 I_0 \tag{14}$$

perchè in questo caso la corrente concatenata è la corrente totale.

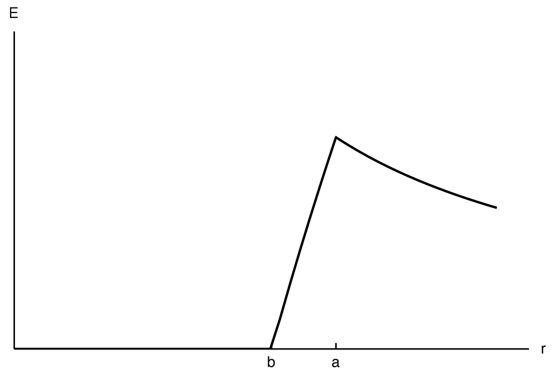
$$2\pi r B\left(r\right) = \mu_0 I_0 \tag{15}$$

$$B\left(r\right) = \frac{\mu_0 I_0}{2\pi r} \tag{16}$$

Riassumendo, il campo nelle varie regioni sarà dato da

$$B = \begin{cases} 0 & 0 \leq r \leq b \\ \frac{i_0 \mu_0 \left(r^2 - b^2\right)}{2\pi r \left(a^2 - b^2\right)} & b \leq r \leq a \\ \frac{i_0 \mu_0}{2\pi r} & r \geq a \end{cases} \tag{17}$$

con il seguente andamento



Sostituendo i dati si ricava che

$$B\left(r = 1.8cm\right) = \ 6.29 \cdot 10^{-4} \text{ T}. \tag{18}$$

La forza di Lorentz vale

$$F = q\vec{v} \times \vec{B} \tag{19}$$

Nel caso considerato $\vec{v}$ e $\vec{B}$ sono perpendicolari pertanto si ottiene

$$F = \ 1.81 \cdot 10^{-16} \text{ N} . \tag{20}$$

SOLUZIONE ESERCIZIO 3

Consideriamo il primo caso, in cui la spira è ferma e la corrente varia nel tempo. Il flusso del campo B in questo caso vale

$$\Phi(B) = \int_a^{a+l} \frac{\mu_0 i_0 \cos\omega t}{2\pi r} l dr = \tag{21}$$

$$= \frac{\mu_0 i_0 l \cos\omega t}{2\pi} \ln\frac{a+l}{a} \tag{22}$$

allora la corrente indotta nella spira vale

$$i' = -\frac{\mu_0 i_0 l\omega \sin\omega t}{2\pi R} \ln\frac{a+l}{a} = 6.48 \cdot 10^{-5} \text{ A} . \tag{23}$$

Per quanto riguarda il verso, visto che siamo ne IV quadrante, la corrente nel filo va verso destra. Il campo B è quindi entrante nel foglio e sta aumentando. Questo implica che la corrente nella spira circoli con verso antiorario.

Consideriamo il secondo caso: corrente costante nel filo ma spira in movimento. Il flusso sarà, in questo caso, dato da

$$\Phi(B) = \int_{a+v_\perp t}^{a+v_\perp t+l} \frac{\mu_0 i_0}{2\pi r} l dr = \frac{\mu_0 i_0 l}{2\pi} \ln\left(1 + \frac{l}{a + v\sin\theta t}\right) \tag{24}$$

la corrente indotta $i = -(1/R)\ (d\Phi/dt)$ vale quindi

$$i' = \frac{\mu_0 i_0 l}{2\pi R} \frac{\frac{lv\sin\theta}{(a+v\sin\theta t)^2}}{1 + \frac{l}{a+v\sin\theta t}} = \tag{25}$$

$$= \frac{\mu_0 i_0 l^2 v\sin\theta}{2\pi R} \frac{1}{(a + v\sin\theta t)(a + l + v\sin\theta t)} \tag{26}$$

e quindi

$$i' = 1.56 \cdot 10^{-7} \text{ A} . \tag{27}$$

Inoltre, poichè la spira si allontana, il flusso di B decresce e quindi il verso è in questo caso orario.