Prova scritta - 11 Settembre 2019

Soluzione Esercizio 1

Consideriamo le forze che agiscono sulla cassa lungo l'asse orizzontale e quello verticale. Per comodità scegliamo l'asse orizzontale concorde al moto e quello verticale diretto verso il basso, in modo da essere concorde alla forza F. Il secondo principio della dinamica sarà quindi:

$$\begin{aligned} -\mu_D N &= ma \\ F + mg - N &= 0 \end{aligned} \tag{1}$$

Da cui ricaviamo:

$$\begin{aligned} -\mu_D(F + mg) &= ma \\ N &= F + mg \end{aligned} \tag{2}$$

Dalla prima equazione ricaviamo l'espressione per l'accelerazione della cassa:

$$a = -\frac{\mu_D}{m}(F + mg) \tag{3}$$

Consideriamo ora il primo caso, in cui $F = bt$ con $b = 100\ N/s$. L'accelerazione sarà:

$$a = -\frac{\mu_D}{m}(bt + mg) \tag{4}$$

L'istante in cui la cassa si ferma corrisponde al momento in cui la sua velocità si annulla. Se indichiamo con τ questo istante, avremo:

$$v(\tau) = 0 \tag{5}$$

D'altro canto, per un istante di tempo generico la velocità potrà essere ricavata integrando l'accelerazione, secondo:

$$v(t) = v_0 + \int_0^t a(t)dt \tag{6}$$

Ma allora per $t = \tau$ avremo:

$$v(\tau) = v_0 + \int_0^\tau a(t)dt = 0 \tag{7}$$

Sostituendo l'espressione di $a(t)$ ricavata prima avremo:

$$\begin{aligned} v(\tau) &= v_0 - \frac{\mu_D}{m} b \int_0^\tau t dt - \mu_D g \int_0^\tau dt \\ &= v_0 - \frac{\mu_D}{m} b \frac{1}{2}\tau^2 - \mu_D g \tau = 0 \end{aligned} \tag{8}$$

Da cui ricaviamo un'equazione di secondo grado in τ:

$$\mu_D b \tau^2 + 2m\mu_D g \tau - 2mv_0 = 0 \tag{9}$$

La cui unica soluzione accettabile è:

$$\tau = \frac{-mu_D mg + \sqrt{(\mu_D mg)^2 + 2\mu_D bmv_0}}{\mu_D b} = 1.01\ s \tag{10}$$

Lo spazio percorso dalla cassa fino all'istante τ sarà allora dato da:

$$d = \int_0^\tau v(t)dt = \frac{\mu_D}{2m} b \frac{1}{3}\tau^3 - \mu_D g \frac{1}{2}\tau^2 + v_0\tau = 1.69\ m \tag{11}$$

Nel secondo caso l'accelerazione sarà invece data da:

$$a = -\frac{\mu_D}{m}(cx + mg) \tag{12}$$

Dal teorema delle forze vive ricaviamo che il lavoro compiuto dalla forza d'attrito equivale alla variazione di energia cinetica della cassa; poiché alla fine l'energia cinetica è nulla, avremo semplicemente:

$$L_{attrito} = \frac{1}{2}mv_0^2 \tag{13}$$

dove:

$$L_{attrito} = -\int_0^d \mu_D(cx + mg)dx = -\mu_D c\frac{d^2}{2} - \mu_D mgd \tag{14}$$

essendo d lo spazio percorso dalla cassa prima di fermarsi. Avremo allora:

$$\mu_D c\frac{d^2}{2} + \mu_D mgd - \frac{1}{2}mv_0^2 = 0 \tag{15}$$

Da cui ricaviamo:

$$d = \frac{-mu_D mg + \sqrt{(\mu_D mg)^2 + \mu_D cmv_0^2}}{\mu_D c} = 2.03\ m \tag{16}$$

Soluzione Esercizio 2

Poiché l'attrito tra il carrello e il binario è trascurabile, la risultante delle forze esterne agenti sul sistema carrello-persona è nulla lungo la componente parallela alle rotaie; in questa direzione, quindi, la quantità di moto totale del sistema si conserva. Se indichiamo con V e v le velocità del carrello e della persona dopo che quest'ultima ha effettuato il salto, avremo:

$$(M+m)V_0 = MV + mv \tag{17}$$

La velocità della persona dopo il salto (v) sarà legata a quella della persona rispetto al carrello (u) dalla relazione:

$$u = V - v \tag{18}$$

Ma allora dalla conservazione della quantità di moto possiamo ricavare:

$$V = V_0 + \frac{m}{M+m}u = 21m/s \tag{19}$$

essendo $V_0 = 72$ km/h = 16 m/s. Inoltre:

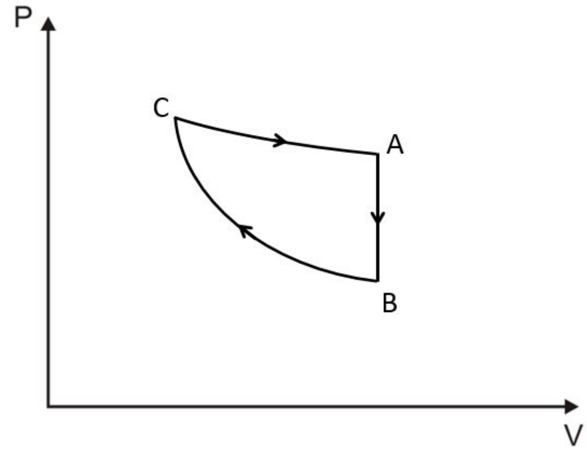
$$v = V_0 - \frac{M}{M+m}u \tag{20}$$

Per ricavare il lavoro compiuto dalla persona possiamo applicare il teorema delle forze vive valutando la variazione di energia cinetica del sistema prima e dopo il salto:

$$L = \frac{1}{2}MV^2 + \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}(M+m)V_0^2 = 500J \tag{21}$$

Soluzione Esercizio 3

Possiamo rappresentare graficamente il ciclo nel seguente modo:



Per calcolare il volume V_C basta considerare la trasformazione adiabatica BC:

$$T_B V_B^{\gamma-1} = T_C V_C^{\gamma-1} \tag{22}$$

Da cui ricaviamo:

$$V_C = V_B \left(\frac{T_B}{T_A}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} = V_A \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{1}{\gamma-1}} = 2.82 \text{ litri} \tag{23}$$

Il rendimento del ciclo sarà invece dato da:

$$\eta = 1 - \frac{|Q_{ceduto}|}{Q_{assorbito}} \tag{24}$$

Calcoliamo quindi il calore scambiato durante le trasformazioni AB e CA (la trasformazione BC, infatti, è un'adiabatica). Per l'isocora avremo:

$$Q_{AB} = \Delta U_{AB} = nc_V(T_B - T_A) = -7229.7\ J \tag{25}$$

Mentre per l'isoterma:

$$Q_{CA} = L_{CA} = \int_C^A pdV = nRT_A ln\left(\frac{V_A}{V_C}\right) = 10051\ J \tag{26}$$

Il rendimento sarà quindi:

$$\eta = 0.28 \tag{27}$$