Prova scritta - 2 Luglio 2019

Soluzione Esercizio 1

Consideriamo l'asse delle ascisse orientato nel verso di v_0 e con l'origine nella posizione iniziale del corpo. Il lavoro complessivo fatto dalla forza di attrito in corrispondenza dello spostamento del corpo fino alla sommità del piano inclinato sarà:

$$L_{attrito} = -\mu_D mgl_1 - \mu_D mgl_2 cos\alpha \tag{1}$$

essendo $mgcos\alpha$ la reazione normale al piano inclinato. Inoltre, all'inizio il corpo avrà solo energia cinetica:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 \tag{2}$$

mentre alla sommità del piano avrà solo energia potenziale gravitazionale:

$$mgl_2 sen\alpha \tag{3}$$

L'energia meccanica totale sarà allora data da:

$$mgl_2 sen\alpha - \frac{1}{2}mv_0^2 = -\mu_D mgl_1 - \mu_D mgl_2 cos\alpha \tag{4}$$

Ricaviamo allora:

$$v_0 = \sqrt{2\mu_D g(l_1 + l_2 cos\alpha) + 2gl_2 sen\alpha} = 6.9\ m/s \tag{5}$$

Affinché il corpo, dopo essersi fermato, non torni indietro, la forza d'attrito statico deve vincere la componente della forza peso lungo il piano inclinato:

$$\mu_S mgcos\alpha > mgsen\alpha \tag{6}$$

da cui ricaviamo:

$$\mu_S > tan\alpha = \frac{1}{\sqrt{3}} = 0.58 \tag{7}$$

Se, raggiunta la sommità del piano inclinato, il corpo torna indietro, il tratto percorso successivamente sul piano orizzontale può essere di nuovo ricavato scrivendo la dissipazione dell'energia meccanica totale dovuta all'attrito:

$$mgl_2 sen\alpha - \mu_D mgl_2 cos\alpha - \mu_D mgl_3 = 0 \tag{8}$$

da cui ricaviamo:

$$l_3 = \frac{sen\alpha - \mu_D cos\alpha}{\mu_D} l_2 = 4.9\ m \tag{9}$$

Soluzione Esercizio 2

Scriviamo le equazioni del moto per i due corpi:

$$\begin{aligned} mg - T &= ma \\ T + f &= ma_{\mathrm{CM}} \\ Tr - fr &= I\alpha \end{aligned} \tag{10}$$

dove I è il momento di inerzia del disco rispetto al suo centro, mentre f è la forza di attrito statico che deve esistere per garantire che il moto sia di puro rotolamento, e che è applicata al punto di contatto tra disco e piano; tale forza dev'essere diretta nello stesso verso di T in modo da fornire al disco un momento opposto a quello prodotto da T. Il secondo membro della terza equazione può essere scritto come:

$$I\alpha = \frac{1}{2}mr^2\frac{a_{\mathrm{CM}}}{r} \tag{11}$$

poiché il moto è di puro rotolamento e quindi vale $a_{\mathrm{CM}} = \alpha r$. D'altro canto, l'accelerazione angolare α del disco è legata all'accelerazione tangenziale di un punto sul bordo del disco (che a sua volta coincide con l'accelerazione a della massa m dato che il filo è inestensibile e privo di massa) dall'equazione del moto circolare:

$$\vec{a_t} = \vec{\alpha} \times \vec{r} \tag{12}$$

dove $\vec{r}$ è il raggio del moto circolare; in questo caso, un punto sul bordo del disco descrive una circonferenza di raggio $2r$, poiché l'asse di rotazione del disco è il punto di contatto tra disco e piano. Otteniamo allora:

$$a = 2\alpha r = 2a_{\mathrm{CM}} \tag{13}$$

Sostituendo quest'ultima all'interno delle equazioni del moto ricaviamo:

$$a_{\mathrm{CM}} = \frac{4}{11}g = 3.56\ m/s^2 \tag{14}$$

Mentre per T e f:

$$\begin{aligned} T &= \frac{3}{11}mg = 5.34\ N \\ F &= \frac{1}{11}mg = 1.78\ N \end{aligned} \tag{15}$$

Per ricavare il valore minimo del coefficiente di attrito statico basta imporre che $f \leq \mu_S mg$, da cui ricaviamo:

$$\mu_S \geq \frac{1}{11} = 0.091 \tag{16}$$

Soluzione Esercizio 3

Come si evince dal grafico, una macchina di Carnot segue un ciclo termico che comprende due isoterme e due adiabatiche. Le quantità di calore scambiate dal gas con le sorgenti durante le due trasformazioni isoterme (per cui vale $\Delta U = 0$) sono:

$$\begin{aligned} Q_{12} &= L_{12} = nRT_A ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) \\ Q_{34} &= L_{34} = nRT_B ln\left(\frac{V_4}{V_3}\right) \end{aligned} \tag{17}$$

dove V_2 e V_4 sono legati a V_3 e V_1 tramite le equazioni delle adiabatiche reversibili:

$$\begin{aligned} V_2 &= V_3\left(\frac{T_B}{T_A}\right)^{1/(\gamma-1)} \\ V_4 &= V_1\left(\frac{T_A}{T_B}\right)^{1/(\gamma-1)} \end{aligned} \tag{18}$$

Ricaviamo quindi:

$$\begin{aligned} Q_{12} &= 826 \text{ cal} \\ Q_{34} &= -413 \text{ cal} \end{aligned} \tag{19}$$

Il lavoro complessivo svolto dalla macchina durante il ciclo sarà allora:

$$L_{ciclo} = Q_{12} + Q_{34} = 413 \text{ cal} \tag{20}$$

Il modo più rapido per produrre questo lavoro è far completare alla macchina un solo ciclo e poi fermarla dopo che ha svolto la prima trasformazione isoterma, infatti:

$$L_{ciclo} + Q_{12} = L_{ciclo} + L_{12} = 1239 \text{ cal} = L \tag{21}$$

Lo stato finale in cui si trova la macchina quando viene fermata sarà allora lo stato 2, caratterizzato da:

$$\begin{aligned} T_2 &= T_A \\ V_2 &= V_3\left(\frac{T_B}{T_A}\right)^{1/(\gamma-1)} = 28.3 \text{ litri} \\ p_2 &= \frac{nRT_2}{V_2} = 3.5 \text{ atm} \end{aligned} \tag{22}$$

Il calore totale prelevato fino a quel momento dalla sorgente calda sarà allora:

$$Q_A = 2Q_{12} = 1652 \text{ cal} \tag{23}$$

mentre il calore totale ceduto fino a quel momento alla sorgente fredda sarà semplicemente:

$$Q_B = -413 \text{ cal} \tag{24}$$